Table des matières

Table des figures

★★★

Avant-propos
Comment préparer un cours ?

★★★

Ce qu'on vous propose dans ce "avant-propos" c'est tout simplement une méthode pour optimiser vos acquis non seulement en mécanique mais aussi dans toutes les autres matières. Une écoute attentive et active lors de la séance est fortement recommandée. Elle nécessite de la concentration. Elle peut être accompagnée d'une prise de notes sur un support qui servira à compléter votre polycopié et l'ensemble des documents qui constituent le cours. Lorsqu'un élément du cours n'est pas bien compris, poser des questions. Éviter l'installation de doutes dans votre apprentissage. Pour retenir un cours, il est nécessaire de le relire plusieurs fois :

- une fois quelques heures après la séance ;
- une fois la semaine suivante ;
- une fois un mois plus tard (quand cela reste possible) ;
- et enfin, durant la période de révision proprement dite.

Relevez les intitulés et les sujets abordés. Repérez les définitions et le vocabulaire. Vérifiez aussi les démonstrations qui permettent de construire les formules importantes du cours.

Vous pouvez construire sur feuille, sorte de *carte mentale* du cours sur laquelle peut apparaitre les grandes idées, les définitions, les lois ou encore les formules ainsi que les liens qui existent entre elles. Les exercices de TD sont en corrélation directe avec le cours. Il est inévitable de refaire les exercices. Il est possible de trouver et de faire des exercices supplémentaires sur internet ou à la bibliothèque. Apprenez les formules et si c'est envisageable, leurs démonstrations, dans le but d'en comprendre le sens. La révision ne se limite pas à un déchiffrage du cours. Elle peut s'étendre à la recherche du sens lie au thème traite.

Finalement, à l'approche de l'examen, il est possible de s'organiser en planifiant votre activité de révision. Une semaine avant la date de l'épreuve, le cours est relu. Une ou deux séances seront envisagées durant cette période afin de solliciter vos facultés, sinon demandez des explications supplémentaires à votre professeur.

Éviter les révisions intensives la veille de l'évaluation.

★★★

Introduction générale

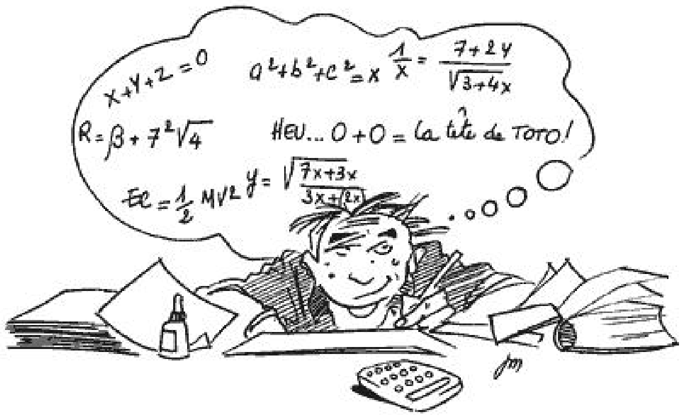
★★★

Le cours de mécanique présenté ici concerne la mécanique du point. Pratiquement elle concerne les objets matériels dont l'extension spatiale est très faible : leurs déformations et l'énergie liée à leur mouvement propre de rotation peuvent ainsi être négligées devant les énergies mises en jeu. Cependant un objet aussi volumineux que la terre ou le soleil peut dans certains cas être assimilable à un point en ce qui concerne, par exemple, son action sur des corps dans son entourage. Nous n'étudierons pas de systèmes de très petites dimensions, à l'échelle atomique, domaine pour lequel il a été montré il y a un siècle que les notions de mécanique classique doivent être remplacées par celles de mécanique quantique.
De même la mécanique relativiste sort du cadre de cette présentation et nous n'envisagerons que des mobiles dont la vitesse est faible devant celle de la lumière (mécanique "classique"). Toutefois le principe fondamental de la dynamique sera donné dans le cadre relativiste, son expression étant très simple à partir de la quantité de mouvement, et nous en déduirons les relations classiquement utilisées que sont les lois de Newton.
Nous supposerons qu'un temps unique peut-être défini en tout point de l'espace, et que les longueurs, masses, temps, et forces sont invariantes lors d'un changement de référentiel.

Chapitre 1

Rappels mathématiques des notions fondamentales

⌜ *Le premier chapitre de ce cours est consacré principalement aux rappels mathématiques du calcul vectoriel et des opérateurs différentiels, utilisés pour exprimer les lois de la mécanique. L'objectif de cette première partie est donc d'introduire les différentes techniques et outils de calcul différentiel et vectoriel et de se familiariser avec les nouvelles notations.*⌝



1.1 Grandeur scalaire & Grandeur vectorielle

En physique, on utilise deux types de grandeurs : les grandeurs scalaires et les grandeurs vectorielles.

1.1.1 Les grandeurs physiques scalaires

Ces grandeurs sont entièrement définies par un nombre et une unité appropriée, exemples : la *masse* m d'un corps, la *longueur* l d'un objet, l'*énergie* E d'un système...

1.1.2 Une grandeur physique vectorielle

C'est une quantité spécifiée par un nombre et une unité appropriée plus une direction et un sens. Géométriquement, elle est représentée par un vecteur ayant la même direction, le même sens et un module mesuré en choisissant une unité graphique correspondante, c'est-à-dire l'échelle. On peut citer comme grandeurs vectorielles la vitesse : La *vitesse* $\overrightarrow{v}$, le *poids* $\overrightarrow{P}$ d'un corps, le *champs magnétique* $\overrightarrow{B}$, la *force* $\overrightarrow{F}$ ...

1.1.3 Représentation graphique d'un vecteur

Un vecteur est représenté par un segment orienté.
$\overrightarrow{V}$: Représente le vecteur (avec ses quatre caractéristiques : origine, direction, sens, module).
$\|\overrightarrow{V}\| = V$: Représente le module ou l'intensité du vecteur.

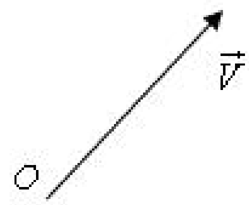


FIGURE 1.1 – Représentation d'un vecteur

1.1.4 Vecteur unitaire

C'est un vecteur de module égal à l'unité (le nombre un). On exprimer un vecteur parallèle au vecteur unitaire sous la forme :

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{u}V = V\overrightarrow{u}$$

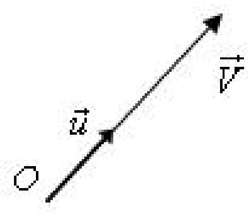


FIGURE 1.2 – Vecteur unitaire

1.2 Opérations sur les vecteurs

1.2.1 Addition vectorielle

La somme de deux vecteurs libres $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$, notée $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$ est un vecteur libre $\overrightarrow{R}$, obtenu par la règle des **parallélogramme**.
On calcule le module du vecteur résultant à partir de la **loi des cosinus** :

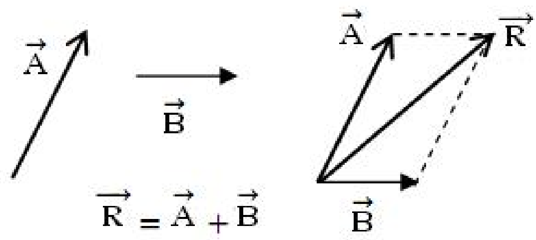


FIGURE 1.3 – Somme de deux vecteurs

$$\|\overrightarrow{R}\| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2A.B.cos(\widehat{\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}})} \quad (1.1)$$

Propriétés :
Commutativité : $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}+\overrightarrow{A}$

1.2.2 Soustraction vectorielle

Soit les deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$, la différence notée $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}$, ou encore $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{A}+(-\overrightarrow{B})$. On peut alors appliquer la règle du parallélogramme.

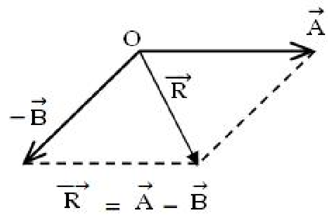


FIGURE 1.4 – Différence de deux vecteurs

Remarque

Lorsque le nombre de vecteurs à additionner est supérieur à deux on applique la méthode géométrique qui consiste à les placer les vecteurs bout à bout comme montré sur la figure 1.5.

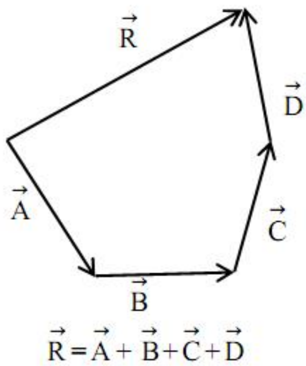


FIGURE 1.5 – Somme de plusieurs vecteurs

1.3 Produit scalaire

1.3.1 Définition et expression

Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$, noté $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}$, est le **scalaire** (nombre réel) définit par :

$$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = \|\overrightarrow{A}\|.\|\overrightarrow{B}\|.cos\theta = A.B.cos\theta \tag{1.2}$$

L'angle $\theta = (\widehat{\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}})$ est l'angle entre les deux vecteurs.

Remarque

Le produit scalaire est donc positif pour *theta* aigu, négatif pour *theta* grand.

1.3.2 Cas particuliers

— Si $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = 0$
— Si $\overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{B} \neq \overrightarrow{0}$ alors :

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = 0 & \Rightarrow \quad cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\widehat{\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}}) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{A} \perp \overrightarrow{B} \\ \overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = A.B & \Rightarrow \quad cos(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad (\widehat{\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{A} \parallel \overrightarrow{B} \end{cases}$$

1.3.3 Forme Analytique

Soit les deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ dont les composantes sont exprimées dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ du repère $\Re(x, y, z)$ tel que :

$$\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

le produit scalaire de ces deux vecteurs est le scalaire défini par la relation :

$$\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_x.V_x \\ U_y.V_y \\ U_z.V_z \end{pmatrix}$$

d'où,

$$\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V} = U_x.V_x + U_y.V_y + U_z.V_z \tag{1.3}$$

Car ($\overrightarrow{i}.\overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}.\overrightarrow{k} = 1$ et $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{k} = \overrightarrow{k}.\overrightarrow{i} = 0$)

1.3.4 Propriétés

— Commutativité : $\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}.\overrightarrow{U}$
— Distributivité par rapport à l'addition : $(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}).\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U}.\overrightarrow{W} + \overrightarrow{V}.\overrightarrow{W}$
— Linéarité : $(\alpha.\overrightarrow{U}).(\beta.\overrightarrow{V}) = (\alpha.\beta)(\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V})$

1.4 Produit vectoriel

1.4.1 Définition

On appelle produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ le vecteur noté $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ dont les caractéristiques sont :

— *Direction :* Perpendiculaire au plan contenant les deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ ($\vec{W} \perp \vec{U}$ et $\vec{W} \perp \vec{V}$)

— *Sens :* Sens du trièdre direct $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$

— *Module :*

$$\|\vec{W}\| = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.sin(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}) \tag{1.4}$$

Remarque

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$
$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad ; \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad ; \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

1.4.2 Forme analytique

Comme précédemment, on exprime les composantes des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, le produit vectoriel des deux vecteurs est le vecteur défini par l'équation :

$$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \underbrace{(U_yV_z - U_zV_y)}_{W_x}\vec{i} - \underbrace{(U_xV_z - U_zV_x)}_{W_y}\vec{j} + \underbrace{(U_xV_y - U_yV_x)}_{W_z}\vec{k}$$

Le module du vecteur est donné par l'expression :

$$W = \sqrt{(U_yV_z - U_zV_y)^2 + (U_zV_x - U_xV_z)^2 + (U_xV_y - U_yV_x)^2} \tag{1.5}$$

1.4.3 Propriétés

— Anticommutatif : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$

— Non associatif : $\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) \neq (\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{W}$

— Distributif par rapport à la somme : $\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) = (\vec{U} \wedge \vec{V}) + (\vec{U} \wedge \vec{W})$

1.5 Produit Mixte

Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ est la quantité scalaire définie par :

$$\vec{V}.(\vec{U} \wedge \vec{W}) = \begin{vmatrix} U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix}$$

$$= (V_yW_z - W_yV_z)U_x - (V_xW_z - W_xV_z)U_y + (V_xW_y - W_xV_y)U_z$$

1.6 Applications du produit vectoriel en physique

1.6.1 Moment d'un vecteur par rapport à un point

Le moment d'un vecteur par rapport à un point de l'espace est le vecteur défini par :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{AB}/O} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} \tag{1.6}$$

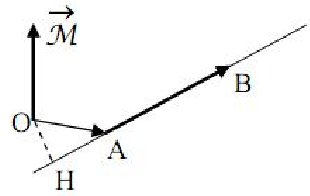


FIGURE 1.6 – Moment par rapport au point O

1.6.2 Moment d'un vecteur par rapport à un axe

Le moment d'une force $\overrightarrow{F}$, appliquée au point M de l'espace, par rapport à un axe (Oz) muni du vecteur unitaire $\overrightarrow{k}$ est donné par la relation :

$$\mathcal{M}_{\overrightarrow{F}/Oz} = \overrightarrow{k}(\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}) \tag{1.7}$$

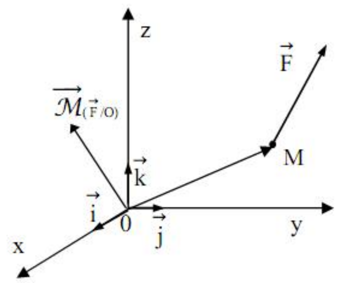


FIGURE 1.7 – Moment par rapport à l'axe Oz

1.6.3 Condition pour que deux vecteurs soient parallèles

Soit deux vecteurs libres $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$, pour que les deux vecteurs soient parallèles il faut que :

$$\overrightarrow{U} \parallel \overrightarrow{V} \quad \Rightarrow \quad \|\overrightarrow{U}\|.\|\overrightarrow{V}\| sin(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}) = 0 \quad Soit \quad \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0} \tag{1.8}$$

1.7 Opérateurs différentiels

1.7.1 Définitions et notations

- On dit que la fonction $f(x, y, z)$ est un champ scalaire si la fonction $f(x, y, z)$ est un scalaire.
- On dit que la fonction $\overrightarrow{U}(x, y, z)$ est un champ vectoriel si la fonction est vectoriel.
- On définit l'opérateur différentiel vectoriel, appelé **Nabla** et noté ∇ par :

$$\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{z} \tag{1.9}$$

avec,
$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ sont respectivement les dérivées partielles par rapport à x,y,z.

1.7.2 Le Gradient

Soit $f(x, y, z)$ une fonction scalaire, son gradient est un vecteur défini par :

$$\overrightarrow{grad}f = \overrightarrow{\nabla}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{z} \tag{1.10}$$

1.7.3 La Divergence

Soit $\overrightarrow{U}(U_x, U_y, U_z)$ une fonction vectorielle, sa divergence est un scalaire défini par :

$$div\overrightarrow{U} = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \tag{1.11}$$

1.7.4 Le Rotationnel

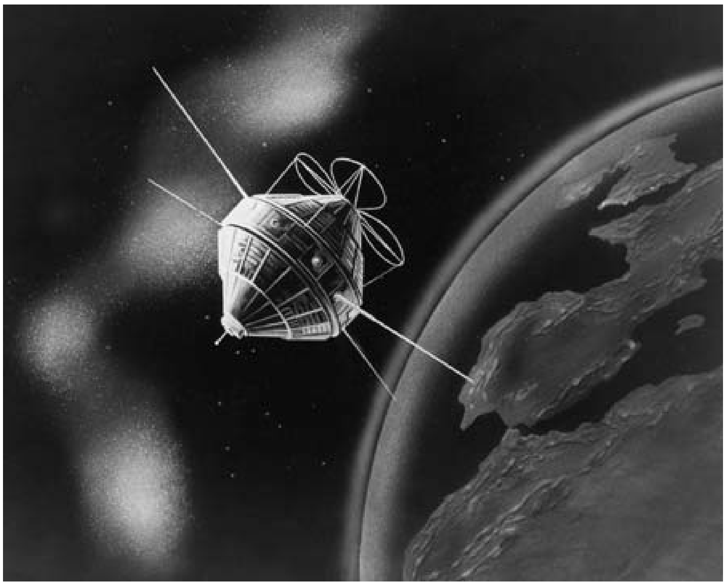
Soit $\overrightarrow{U}(U_x, U_y, U_z)$ une fonction vectorielle, son rotaionnel est un vecteur défini par :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{U}) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{U} = \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} - \left(\frac{\partial U_z}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial z}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{z} \tag{1.12}$$

Chapitre 2

Systèmes de coordonnées

⌜ *Afin de déterminer la position instantanée d'un point matériel, nous devons choisir tout d'abord un repère parmi les différents repères les plus utilisés. Le contenu de ce chapitre contiendra des rappels détaillés des principaux systèmes de coordonnées.* ⌝



2.1 Généralités

La détermination de la position d'un mobile dans l'espace, nécessite le choix d'un corps solide, qu'on appelle référentiel, auquel nous associons des axes de coordonnées. Définir la position et l'instant d'origine revient à dire par quel *observateur* ou quels références le mouvement est étudiée. Cet *observateur* est, en mécanique, le référentiel. Un référentiel en mécanique classique est défini par rapport à un objet. L'observateur se place à coté de cet objet pour étudier le mouvement.
Définition :
Tout ensemble de systèmes d'axes de coordonnées, lié à un corps solide S qui est le référentiel, constitue un repère lié à ce corps solide.
Exemples :
Une table (référentiel) + 3 axes = repère lié à la table.
Dans un référentiel galiléen R donné, on repère une position ponctuelle M à l'aide de trois coordonnées spatiales et une coordonnée temporelle, donc la position est définie par quatre nombres réels, par exemple (x, y, z, t).

2.2 Système de coordonnées cartésiennes

2.2.1 Le repère spatial (O, X, Y, Z)

Le repérage de la position d'un mobile ponctuel M dans le repère $\Re(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ se réalise à l'aide du vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, ou aussi à l'aide des coordonnées cartésiennes. On définit le vecteur position par :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{2.1}$$

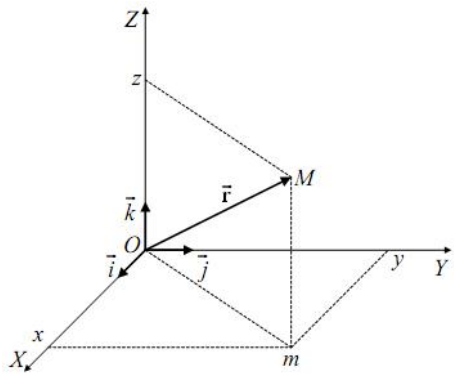


FIGURE 2.1 – Vecteur position en coordonnées cartésiennes

2.2.2 Le repère plan (O, X, Y)

Ce système est utilisé pour repérer le mouvement d'un corps ponctuel dans un plan (ou repère $\Re(O, x, y)$. Il est composé de deux axes orthogonaux du plan, Ox et Oy, munis des vecteurs unitaires orientés positivement $\vec{i}$, $\vec{j}$. Le vecteur position du mobile M est défini sous la forme suivante :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \tag{2.2}$$

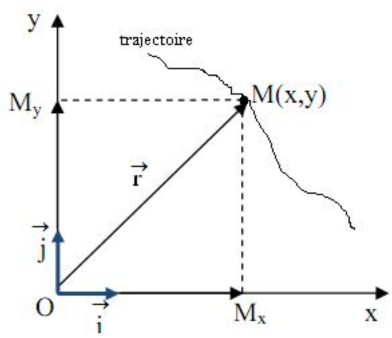


FIGURE 2.2 – Position du mobile dans le plan (x, y)

2.2.3 Le repère rectiligne

Dans le cas où le mouvement du point M est rectiligne, prenant par exemple le mouvement suivant l'axe Ox. Le vecteur position dans ce cas s'écrit :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} \tag{2.3}$$

2.3 Système de coordonnées polaires

De la même manière que dans le cas des coordonnées cartésiennes, on peut repérer la position du mobile M par ses coordonnées polaires (r, θ). L'angle θ représente la *coordonnée angulaire*, $r = OM$ correspond à la *coordonnée radiale.*

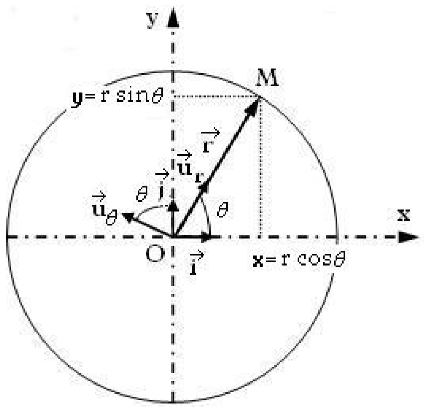


FIGURE 2.3 – Les coordonnées polaires (r, θ) et la base associée

On exprime le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base polaire (orthonormée directe) $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$:

$$\overrightarrow{OM} = \|\overrightarrow{OM}\|.\vec{u_r} = r.\vec{u_r}$$

Le vecteur unitaire $\vec{u_r}$ est suivant la direction et le sens de O vers M : c'est le vecteur *radial* (suivant le rayon).
Ces vecteurs peuvent être représentés n'importe où dans l'espace mais ils sont représentés souvent soit au point origine O soit au point M lui-même.

♦ **Relation entre les coordonnées polaires et cartésiennes :**
Les relations entre les systèmes de coordonnées cartésiennes et polaires sont :

- **Passage : Polaires ⇒ Cartésiennes**
  $OM = r = \sqrt{x^2 + y^2}$
  $cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\begin{cases} \vec{u_r} &= \quad cos\theta\,\vec{i} + sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{u_\theta} &= \quad -sin\theta\,\vec{i} + cos\theta\,\vec{j} \end{cases} \tag{2.4}$$

- **Passage : Cartésiennes ⇒ Polaires**
  $x = rcos\theta$, $y = rsin\theta$

$$\begin{cases} \vec{i} &= \quad cos\theta\vec{u_r} - sin\theta\vec{u_\theta} \\ \vec{j} &= \quad sin\theta\vec{u_r} + cos\theta\vec{u_\theta} \end{cases} \tag{2.5}$$

2.4 Système de coordonnées cylindriques

Pour obtenir le système de coordonnées cylindriques il suffit de compléter le système de coordonnées polaires (dans le plan Oxy) par un troisième axe : l'axe Oz avec sa coordonnée cartésienne z (appelée la cote)

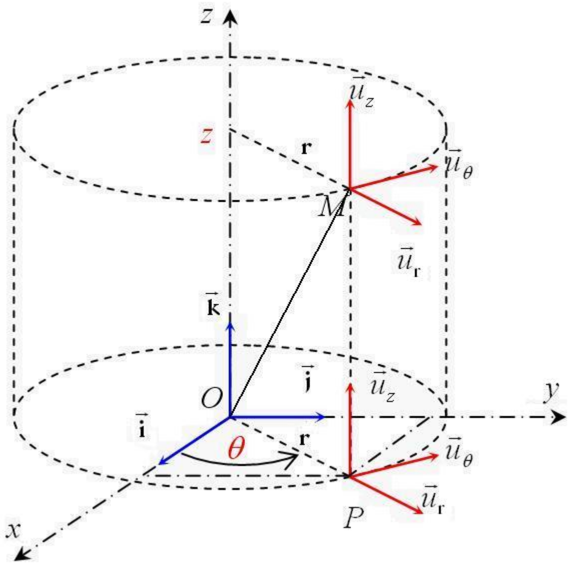


FIGURE 2.4 – Les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et la base associée.

La projection du point M sur l'axe Oz donne la cote z. La projection P du point M dans le plan (Oxy) est repérée en coordonnées polaires (r, θ).
Le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z} \tag{2.6}$$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = OM = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{2.7}$$

Les relations de transformation entre coordonnées cartésiennes et coordonnées cylindriques sont très semblables à celles obtenues au paragraphe précédent pour les coordonnées polaires.

2.5 Système de coordonnées sphériques

Les coordonnées cylindriques ne sont pas très pratiques pour caractériser un point sur une sphère qui est le lieu où tous les points sont à égale distance du centre C de la sphère. Pour cela, on préférera utiliser les coordonnées sphériques.
Les coordonnées sphériques du point M sont exprimées en fonction de : r, θ et ϕ tels que :

$$r = \|\overrightarrow{OM}\|, \qquad \theta = (\widehat{\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM}}), \qquad \phi = (\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{Om}})$$

Nous démontrons géométriquement (figure 1.5) les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnés sphériques :

$$\left|\begin{array}{lcl} x & = & \varrho.cos\phi \\ y & = & \varrho.sin\phi \\ \varrho & = & r.sin\theta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{lcl} x & = & r.sin\theta.cos\phi \\ y & = & r.sin\theta.sin\phi \\ z & = & r.cos\theta \end{array}\right. \quad et \quad \left|\begin{array}{lcl} r & = & \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta & = & arccos\dfrac{z}{r} \\ \phi & = & artang\dfrac{y}{x} \end{array}\right.$$

On exprime le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u}_r$$

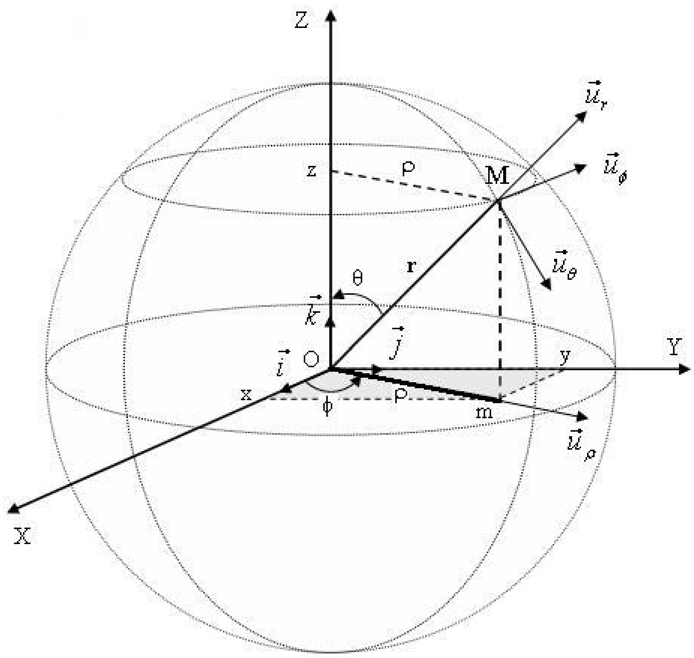


FIGURE 2.5 – Les coordonnées sphériques (r, ϕ, θ) et la base associée.

Expressions des vecteurs unitaires : $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\phi}, \overrightarrow{u_\theta})$

Nous avons :

$$\begin{cases} \overrightarrow{r} & = r\overrightarrow{u_r} & = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} \\ \overrightarrow{Om} & = \varrho\overrightarrow{u_\varrho} & = \varrho[cos\phi\,\overrightarrow{i} + sin\phi\,\overrightarrow{j}] \\ \overrightarrow{mM} & = z\,\overrightarrow{k} & = \overrightarrow{k}\,rcos\theta \\ \varrho & = rsin\theta \end{cases} \tag{2.8}$$

En déduit des équations 2.8 l'expression du vecteur position :

$$\overrightarrow{r} = r\left[sin\theta cos\phi\,\overrightarrow{i} + sin\theta sin\phi\,\overrightarrow{j} + cos\theta\,\overrightarrow{k}\right]$$

On peut clairement retrouver l'expression du vecteur $\overrightarrow{u_r}$:

$$\overrightarrow{u_r} = sin\theta cos\phi\,\overrightarrow{i} + sin\theta sin\phi\,\overrightarrow{j} + cos\theta\,\overrightarrow{k} \tag{2.9}$$

Il nous reste à déterminer le vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$. La base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\phi}, \overrightarrow{u_\theta})$ étant orthonormée directe, le vecteur

Le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\phi}$ est directement perpendiculaire à $\overrightarrow{Om}$. Il fait un angle $(\phi + \frac{\pi}{2})$ avec l'axe Ox et s'écrit :

$$\overrightarrow{u_\phi} = -sin\phi\,\overrightarrow{i} + cos\phi\,\overrightarrow{j} \tag{2.10}$$

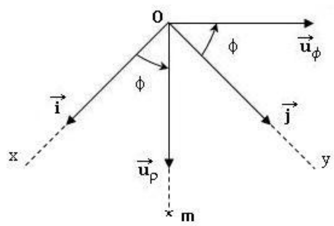


FIGURE 2.6 – Rotation des bases

unitaire $\overrightarrow{u_\theta}$ est donc le résultat du produit vectoriel entre $\overrightarrow{u_\phi}$ et $\overrightarrow{u_r}$.

$$\overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_\phi} \wedge \overrightarrow{u_r} = cos\theta cos\phi\,\overrightarrow{i} + cos\theta sin\phi\,\overrightarrow{j} - sin\theta\,\overrightarrow{k} \tag{2.11}$$

On peut aussi retrouver l'expression du vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$ en utilisant la projection les vecteurs unitaires comme montré sur la figure.

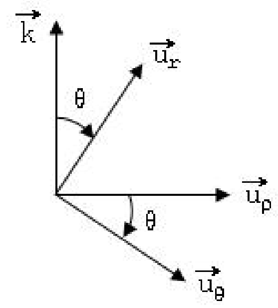


FIGURE 2.7 – Rotation des vecteurs unitaires

2.6 Système de coordonnées curviligne

Nous pouvons repérer la position du mobile sur la trajectoire elle-même à l'aide de l'abscisse curviligne. Pour cela on procède ainsi :

— On oriente la trajectoire en choisissant un sens quelconque,

— On choisit un point fixe O sur la trajectoire, comme étant l'origine des abscisses,

L'abscisse curviligne est défini comme étant la grandeur algébrique s de l'arc appartenant à la trajectoire de O jusqu'à M.

$$\overset{\frown}{OM} = s \tag{2.12}$$

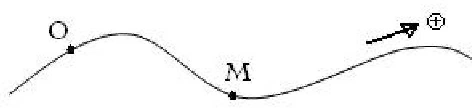


FIGURE 2.8 – Les coordonnées curvilignes.

Chapitre 3

Cinématique du point

⌜ *La Cinématique vise à décrire les mouvements (trajectoire d'un mobile, équation horaire, vitesse, accélération etc.) sans se préoccuper des causes qui les provoquent. Elle repose cependant sur les notions physiques de l'espace et du temps.* ⌝

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéressera à l'étude du mouvement des points matériels. Par définition un point matériel est un objet sans dimensions spatiales. Bien entendu, dans la plupart des cas, il s'agit d'une simplification, les objets réels occupant généralement un certain espace. Néanmoins, ce concept est utile dans bon nombre de situations réelles où on ne s'intéresse pas aux rotations de l'objet sur lui-même ou lorsque les dimensions de l'objet peuvent être négligées.
On appelle trajectoire d'un mobile l'ensemble des positions successives qu'il occupe au cours du temps.

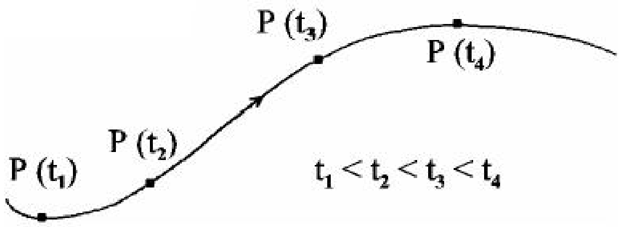


FIGURE 3.1 – Trajectoire d'un mobile

3.2 Équations horaires

En coordonnées cartésiennes, la position d'un point matériel M au temps t est repérée dans un repère $\Re(O, x, y, z)$ par un vecteur position de la forme :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r} = x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k}$$

On dit qu'un point matériel est au repos dans un repère choisi si ses coordonnées x, y, z sont indépendantes du temps, et il est en mouvement si ses coordonnées varient en fonction du temps. Ces coordonnées peuvent être notées par : $x(t), y(t), z(t)$
On appelle ces fonctions, les *équations horaires du mouvement*. On peut les exprimer sous la forme :

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t) \tag{3.1}$$

Remarque

Dans ce paragraphe on a choisi un système de coordonnées cartésiennes, mais on aurait pu choisir un autre système de coordonnées tel que les coordonnées cylindriques ou sphériques.

3.3 Étude du mouvement en coordonnées cartésiennes

La vitesse est le rapport de la distance parcourue par unité de temps. Son unité dans le $S.I$ est $m.s^{-1}$.
Dans toute la suite on va tenir par convention la notation de *Leibnitz* pour la dérivée de x, y, z par exemple, on note :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

On repère la position d'un mobile M dans l'espace en utilisant un système de coordonnées cartésiennes comme montré sur la figure.

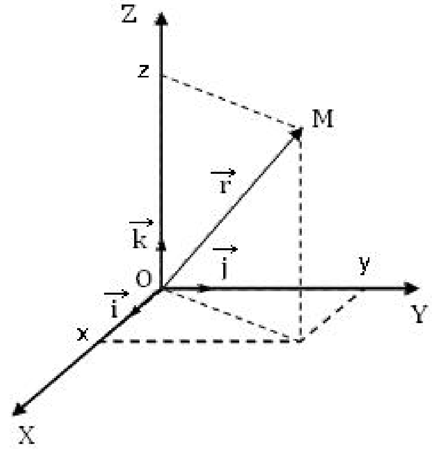


FIGURE 3.2 – Référentiel cartésien

3.3.1 Vecteur vitesse

1- Vecteur vitesse moyenne

Entre les deux instants t et t' le mobile se déplace de la position M à la position M' le vecteur vitesse moyenne est défini par :

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t} \quad et \quad v_{moy} = \frac{|\overrightarrow{MM'}|}{\Delta t} \tag{3.2}$$

$\overrightarrow{MM'}$ est le vecteur déplacement.

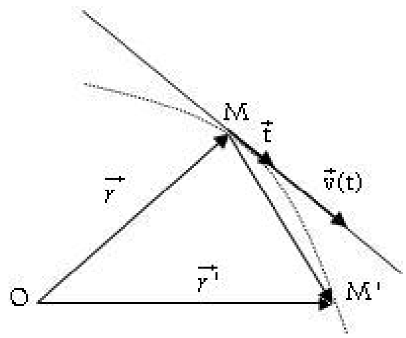


FIGURE 3.3 – Vecteur déplacement du mobile

2- Vecteur vitesse instantanée

Le vecteur vitesse instantanée, c'est à dire au temps t, est la dérivée du vecteur position par rapport au temps :

$$\vec{v} = \lim_{t-t'} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{t'-t} = \lim_{t-t'} \frac{\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \tag{3.3}$$

Remarque

Le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}(t)$ est porté par la tangente à la trajectoire au point M ; il est toujours orienté dans le sens du mouvement.
En tenant compte de la notation de *Leibnitz*, on exprime le vecteur vitesse instantanée en coordonnées cartésiennes sous la forme :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{i} + \dot{z}\,\vec{i}$$

Le module du vecteur vitesse instantanée est exprimé par :

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \tag{3.4}$$

Les composantes du vecteur vitesse sont :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \end{pmatrix}$$

3.3.2 Vecteur accélération

La vitesse pouvant varier avec le temps, on caractérise ce changement en introduisant la notion d'*accélération.* Le *vecteur accélération* noté $\vec{a}$ traduit donc le taux de variation du vecteur vitesse $\vec{v}$ en fonction du temps. L'unité de l'accélération dans le $S.I$ est $m.s^{-2}$.

1- Accélération moyenne

On définit le vecteur accélération moyenne par :

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{v_f} - \vec{v_i}}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}; \quad a_{moy} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \tag{3.5}$$

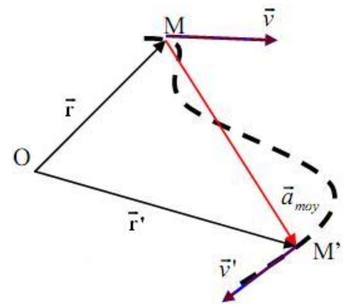


FIGURE 3.4 – Vecteur accélération

2- Accélération instantanée

On définit le vecteur accélération instantanée par :

$$\vec{a} = \lim_{t'-t} \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t' - t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \tag{3.6}$$

En coordonnées cartésiennes on écrit :

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{z} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{z}$$

Le module est donnée par :

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \tag{3.7}$$

3- Résumé

Dans un système de coordonnées cartésiennes on exprime les vecteurs : position, vitesse et accélération par :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \\ v_z = \dot{z} \end{pmatrix}; \quad \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x = \dot{v_x} = \ddot{x} \\ a_y = \dot{v_y} = \ddot{y} \\ a_z = \dot{v_z} = \ddot{z} \end{pmatrix}$$

3.4 Étude du mouvement en coordonnées cylindriques

Il s'agit de la généralisation des coordonnées polaires pour les mouvements en trois dimensions. Un point est repéré par les variables (r, θ, z) où $r \in [0, \infty[; \theta \in [0, 2\pi]; z \in [0, 2\infty]$. La base orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est attachée au point mobile M. Le vecteur position s'écrit sous la forme :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$$

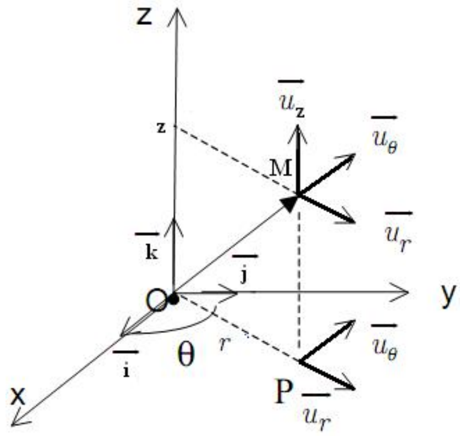


FIGURE 3.5 – Repérage en coordonnées cylindriques

On rappelle les équations de passage des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes (§.1.4 Chp II) :

$$x = rcos\theta, \qquad y = rsin\theta, \qquad z = z$$

Pour arriver au calcul des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ définis précédemment, nous avons besoin d'abord de calculer les dérivées des vecteurs unitaires $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ tournants par rapport à l'angle θ. Nous avons :

$$\begin{cases} \vec{u_r} &= cos\theta\,\vec{i} + sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{u_\theta} &= cos(\theta + \frac{\pi}{2})\,\vec{i} + sin(\theta + \frac{\pi}{2})\,\vec{j} \\ &= -sin\theta\,\vec{i} + cos\theta\,\vec{j} \end{cases}$$

La dérivation des vecteurs unitaire donne

$$\begin{cases} \dot{\vec{u}}_r = \dfrac{d\vec{u_r}(\theta)}{d\theta} = \dfrac{d(cos\theta)}{d\theta}\vec{i} + \dfrac{d(sin\theta)}{d\theta}\vec{j} = -sin\theta\,\vec{i} + cos\theta\,\vec{j} = \vec{u_\theta} \\ \dot{\vec{u}}_\theta = \dfrac{d\vec{u_\theta}(\theta)}{d\theta} = -cos\theta\,\vec{i} + sin\theta\,\vec{j} = -\vec{u_r} \end{cases}$$

Remarque

La dérivée d'un vecteur unitaire par rapport à θ est un vecteur unitaire obtenu par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$.

3.4.1 Le vecteur vitesse en coordonnées cylindriques

On a :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}$$

où,

$$\begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \dfrac{d(r\vec{u_r})}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\vec{u_r} + r\dfrac{d\vec{u_r}}{dt} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\,\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} \\ \dfrac{d\overrightarrow{PM}}{dt} = \dfrac{d(z\vec{u_z})}{dt} = \dfrac{dz}{dt}\vec{u_z} = \dot{z}\,\vec{u_z} \end{cases}$$

L'expression du vecteur vitesse est :

$$\begin{aligned} \vec{v}(M) &= \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z \\ \vec{v}(M) &= \underbrace{\dot{r}\,\vec{u}_r}_{\vec{v}_r} + \underbrace{r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta}_{\vec{u}_\theta} + \underbrace{\dot{z}\,\vec{u}_z}_{\vec{v}_z} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Remarque

On peut remarquer que la vitesse a trois composantes : composante **radiale** $\vec{v}_r$, **tangentielle** $\vec{v}_\theta$ et **azimutale** $\vec{v}_z$. Le module de la vitesse en coordonnées cylindriques est donné par l'expression :

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\,\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}$$

3.4.2 Le vecteur accélération en coordonnées cylindriques

On a :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$$

Comme :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta; \qquad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = -\,\dot{\theta}\,\vec{u}_r$$

d'où l'expression du vecteur accélération :

$$\vec{a} = \underbrace{(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)}_{a_r}\vec{u}_r + \underbrace{(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\dot{\theta})}_{a_\theta}\vec{u}_\theta + \underbrace{\ddot{z}}_{a_z}\vec{a}_z \tag{3.9}$$

Comme la vitesse, le vecteur accélération a aussi trois composantes : accélération *radiale* $\vec{a}_r$, *tangentielle* $\vec{a}_\theta$ et *azimutale* $\vec{u}_z$

3.5 Étude du mouvement en coordonnées sphériques

Dans ce paragraphe, nous rappelons les expressions des vecteurs vitesse et d'accélération en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ).

Le vecteur position du mobile : On exprime la position du mobile par :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{u}_r \tag{3.10}$$

On rappelle les relations de passage du système de coordonnées sphériques au système de coordonnées cartésiennes (*voir le chapitre II*) :

$$\begin{cases} \vec{u}_r &= sin\theta cos\phi\,\vec{i} + sin\theta sin\phi\,\vec{j} + cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{u}_\phi &= -sin\phi\,\vec{i} + cos\phi\,\vec{j} \\ \vec{u}_\theta &= cos\theta cos\phi\,\vec{i} + cos\theta sin\phi\,\vec{j} - sin\theta\,\vec{k} \end{cases}$$

3.5.1 Vecteur vitesse en coordonnées sphériques

En dérivant le vecteur position de l'équation $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps on obtient :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\vec{u}}_r \tag{3.11}$$

La dérivation de $\overrightarrow{u}_r$ donne :

$$\dot{\overrightarrow{u}}_r = \dot{\theta}\ \overrightarrow{u}_\theta + \dot{\phi}\ sin\theta \overrightarrow{u}_\phi$$

Par remplacement on obtient l'expression finale de la vitesse en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{v} = \underbrace{\dot{r}\ \overrightarrow{u}_r}_{\overrightarrow{v}_r} + \underbrace{r\ \dot{\theta}\ \overrightarrow{u}_\theta}_{\overrightarrow{v}_\theta} + \underbrace{(rsin\theta)\ \dot{\phi}}_{\overrightarrow{v}_\phi} \overrightarrow{u}_\phi \tag{3.12}$$

3.5.2 Vecteur accélération en coordonnées sphériques

Comme précédemment l'accélération s'obtient en dérivant le vecteur vitesse :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} &= \frac{d}{dt}[\dot{r}\ \overrightarrow{u}_r + r\ \dot{\theta}\ \overrightarrow{u}_\theta + (rsin\theta)\ \dot{\phi}\ \overrightarrow{u}_\phi] \\ &= \overrightarrow{a}_r + \overrightarrow{a}_\theta + \overrightarrow{a}_\phi \end{aligned}$$

Le module est :

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_\phi^2}$$

L'expression du vecteur accélération est exprimé par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} &= (\ddot{r} - r\ \dot{\theta}^2 - r\ \dot{\phi}^2\ sin^2\theta)\overrightarrow{u}_r \\ &+ (r\ \ddot{\theta} + 2\ \dot{r}\dot{\theta} - r\ \dot{\phi}^2\ sin\theta cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta \\ &+ (r\ \ddot{\phi}\ sin\theta + 2\ \dot{r}\dot{\phi}\ sin\theta + 2r\ \dot{\phi}\dot{\theta}\ cos\theta)\overrightarrow{u}_\phi \end{aligned} \tag{3.13}$$

3.6 Étude du mouvement en coordonnées polaire : Mouvement plan

Dans les paragraphes précédents on a étudié le mouvent d'un mobile dans l'espace (mouvent tridimensionnel). Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'étude du mouvement plan où la trajectoire appartient à un plan (ou bidimensionnel). Il est donc possible de repérer le mobile en utilisant soit des coordonnées rectangulaires (O, x, y) (cartésiennes) soit des coordonnées polaires (r, θ).

3.6.1 Vecteur vitesse en coordonnées polaires

Le vecteur vitesse est obtenu facilement à partir de l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques en annulant la composante *azimutale* $v_z = 0$:

$$\overrightarrow{v}(M) = \underbrace{\dot{r}\ \overrightarrow{u}_r}_{\overrightarrow{v}_r} + \underbrace{r\ \dot{\theta}\ \overrightarrow{u}_\theta}_{\overrightarrow{u}_\theta} \tag{3.14}$$

Remarquons que le vecteur vitesse a deux composantes, *radiale* $\overrightarrow{v}_r$ et *transversale ou orthoradiale* $\overrightarrow{v}_\theta$.
Le module de la vitesse est :

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\ \dot{\theta})^2}$$

3.6.2 Vecteur accélération en coordonnées polaires

En dérivant l'équation de la vitesse par rapport au temps on obtient :

$$\vec{a} = \underbrace{(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)}_{\vec{a}_r}\vec{u}_r + \underbrace{(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\dot{\theta})}_{\vec{a}_\theta}\vec{u}_\theta \qquad (3.15)$$

Remarquons aussi que le vecteur accélération a deux composantes, une *radiale* $\vec{a}_r$ et une autre *transversale ou orthoradiale* $\vec{a}_\theta$.

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta$$

Le module :

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

3.6.3 Cas particulier : Mouvement circulaire

Le point matériel M décrit une trajectoire circulaire de rayon R. On se place dans le plan contenant le cercle, que l'on prendra comme plan (O, x, y) où $z = 0$, $v_z = 0$ et $a_z = 0$.
Le point M est repéré par ses coordonnées polaires :

$$M \begin{cases} r = R = Cste \\ \theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta(t) \end{cases}$$

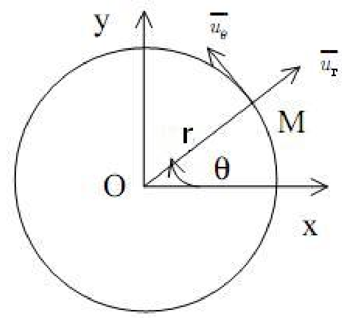


FIGURE 3.6 – Mouvement circulaire

1- Vecteur vitesse

Le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{u}_r$$

et,

$$\begin{aligned} \vec{v}(M) &= \underbrace{\dot{r}}_{=0}\,\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} \\ &= R\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \end{aligned} \qquad (3.16)$$

La vitesse est orthoradiale (car $\vec{v}_\theta \neq 0$ et $\vec{v}_r = 0$), et dans ce cas, tangente à la trajectoire.
Le module de la vitesse :

$$v(M) = R\omega = R\,\dot{\theta} \quad où \quad \omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \qquad (3.17)$$

$\omega = \dot{\theta}$ $[rad.s^{-1}]$ est la vitesse *angulaire*.

2- Vecteur accélération

$$\begin{aligned}\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &= R\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + R\,\dot{\theta}\,\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \\ &= \underbrace{-R\,\dot{\theta}^2}_{a_N}\,\vec{u}_r + \underbrace{R\,\ddot{\theta}}_{a_T}\,\vec{u}_\theta\end{aligned} \tag{3.18}$$

Les composantes du vecteur accélération sont : a_N l'accélération radiale, normale à la trajectoire, a_T l'accélération orthoradiale, tangentielle à la trajectoire.

Remarque

Cas particulier du mouvement circulaire uniforme. Dans ce cas, la vitesse *angulaire est constante* :

$$\omega = \dot{\theta} = cste \Rightarrow v = R\omega = cste$$

.

$$a_T = \ddot{\theta} = 0 \quad et \quad a_N = -R\omega^2 = -\frac{v^2}{R}$$

L'accélération normale est centripète (dirigée vers O)

3.7 Mouvement dans le repère de *Frenet*

Dans certains cas, pour déterminer l'accélération en un point M, on utilise ses composantes intrinsèques qui sont ses projections algébriques :

— $\vec{a}_T$: sur un axe tangentiel, muni du vecteur unitaire $\vec{u}_r$ dirigé dans le sens du mouvement.
— $\vec{a}_N$: sur un axe normal muni du vecteur unitaire $\vec{u}_t$ orienté côté concave de la trajectoire.

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = a_T\,\vec{t} + a_N\,\vec{n}$$

Comme le vecteur vitesse est tangentiel, il s'écrit dans le repère de *Frenet* :

$$\vec{v} = v\,\vec{t}$$

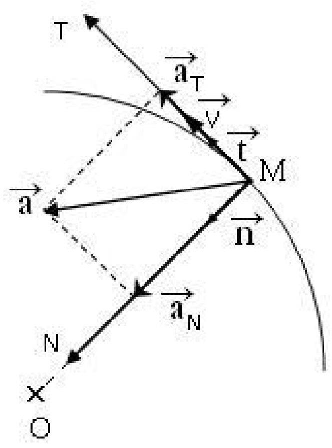


FIGURE 3.7 – Repère de *Frenet*

De ce qui précède, on trouve :

$$\left.\begin{aligned}\vec{a}_T &= \frac{dv}{dt} \\ \vec{a}_N &= \frac{v^2}{R}\end{aligned}\right| \; \vec{a} = \dot{v}\,\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{a}\| = a = \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

3.8 Mouvements rectilignes

3.8.1 Mouvement rectiligne uniforme (MRU)

On définit un MRU par :

Définition :
Un mouvement d'un point matériel est dit rectiligne uniforme si le point matériel se déplace à vecteur vitesse constant.

$$Mouvement\ rectiligne\ uniforme \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{v} = C^{ste}$$

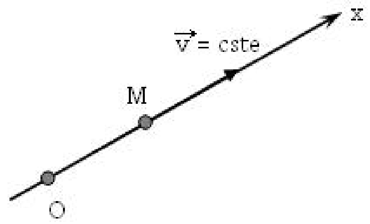


Figure 3.8 – MRU, le point M se déplace sur une droite à vitesse constante.

Le vecteur vitesse étant constant, le mouvement est rectiligne car la vitesse est tangente à la trajectoire. La droite sur laquelle le point se déplace est assimilée à l'axe Ox. L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors :

$$\overrightarrow{v} = \dot{x}\ \overrightarrow{i} = C\overrightarrow{i} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = C \tag{3.19}$$

On intègre l'équation différentielle précédente, on obtient l'*équation horaire* du mouvement :

$$x(t) = Ct + x_0 \tag{3.20}$$

3.8.2 Mouvement uniformément varié (MUV)

Définition :
Un mouvement est dit rectiligne varié si le vecteur accélération est constant et la trajectoire rectiligne.

$$Mouvement\ uniformment\ vari \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a} = C^{ste}$$

Dans ce cas on a :

$$\overrightarrow{a} = \ddot{x}\ \overrightarrow{i} = C\overrightarrow{i} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = C \tag{3.21}$$

Par intégration de cette équation nous obtenons la vitesse du point M :

$$v = \dot{x} = Ct + B \tag{3.22}$$

Une deuxième intégration, conduit à l'équation horaire du mouvement :

$$x(t) = \frac{1}{2}Ct^2 + Bt + D \tag{3.23}$$

Les constantes B et D sont déterminées par les *conditions initiales* du mouvement du point M. Par exemple à $t = 0$ le point M avait une vitesse nulle $v = 0$ à une position initiale $x = x_0$, les constantes d'intégration B et D seront, $B = 0$ et $D = x_0$, l'équation horaire devient :

$$x(t) = \frac{1}{2}Ct^2 + x_0$$

Chapitre 4

Changement de référentiel : Mouvement relatif

⌜ *La vitesse et l'accélération d'un point dépendent du référentiel d'étude. Par exemple, la vitesse d'un passager assis dans un train sera nulle par rapport au référentiel du train mais non nulle par rapport au référentiel terrestre (vu par un observateur sur le quai). L'objectif de chapitre est de mettre en évidence les formules de transformation des coordonnées lorsque l'on passe d'un référentiel à un autre.*⌝

4.1 Notion de vitesse relative de deux mobiles

Soient A et B, deux points matériels en mouvement dans le repère $\Re\ (O, x, y, z)$. On suppose la présence d'un observateur au point O.
On définit la vitesse du mobile A par rapport à l'observateur au point O par :

$$\vec{V}_A = \frac{d\vec{r_A}}{dt}$$

La vitesse du mobile A par rapport au point B est alors :

$$\vec{V}_{AB} = \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}$$

De la même manière on définit la vitesse de B et la vitesse de B par rapport au point A respectivement par :

$$\vec{V}_B = \frac{d\vec{r_B}}{dt}; \qquad \vec{V}_{BA} = \frac{d\overrightarrow{BA}}{dt}$$

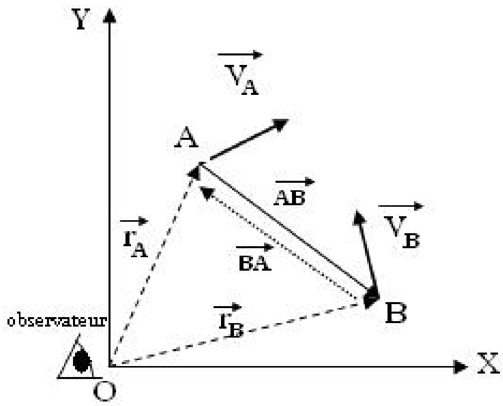


FIGURE 4.1 – Vitesse relative de deux mobile dans le référentiel $\Re$

Où,

$$\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B \qquad et \qquad \vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A \qquad où \qquad \vec{V}_{AB} = -\vec{V}_{BA}$$

et

$$\vec{a}_{AB} = \frac{d\overrightarrow{V_{AB}}}{dt} = \frac{d\vec{V_A}}{dt} - \frac{d\vec{V_B}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{AB} = \vec{a}_A - \vec{a}_B \quad Idem \quad \vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

On obtient les deux accélérations relatives des deux points matériels mobiles en dérivant, par rapport au temps, chacune des deux expressions des vitesses relatives posées précédemment :

$$\vec{a}_{AB} = \frac{d\overrightarrow{V_{AB}}}{dt} = \frac{d\vec{V_A}}{dt} - \frac{d\vec{V_B}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{AB} = \vec{a}_A - \vec{a}_B \quad Idem \quad \vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

Là aussi, comme pour les vecteurs vitesse, il faut remarquer que $\vec{a}_{AB} = -\vec{a}_{AB}$, c'est-à-dire que les deux accélérations sont égales en module mais de sens contraires.

4.2 Transformation du vecteur vitesse

4.2.1 Relation entre les positions

D'après la figure, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} \quad &= \quad \overrightarrow{OO'} \quad + \quad \overrightarrow{O'M} \\ \underbrace{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}_{\overrightarrow{OM}} \quad &= \quad \underbrace{(x_{O'}\vec{i} + y_{O'}\vec{j} + z_{O'}\vec{k})}_{\overrightarrow{OO'}} \quad + \quad \underbrace{(x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'})}_{\overrightarrow{O'M}} \end{aligned} \tag{4.1}$$

x', y', z' sont les coordonnées du point M dans le repère relatif (O', X', Y', Z')

Soit M un point dont on étudie le mouvement dans deux référentiels différents. Le premier, d'origine O, est supposé fixe (ou **absolu**) noté $\Re_a$, l'autre, d'origine O', est un référentiel mobile (ou **relatif**) noté $\Re_r$.

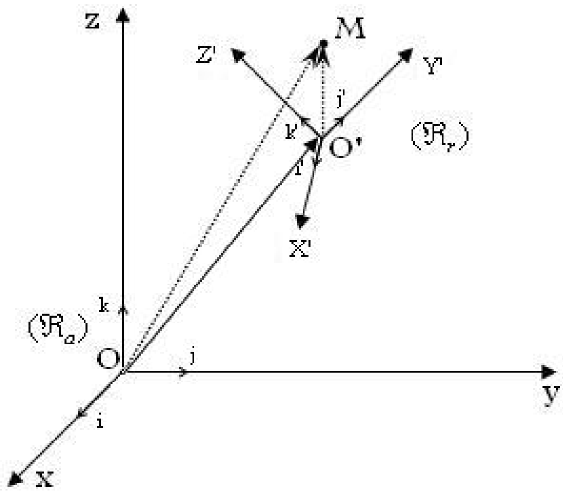


FIGURE 4.2 – Référentiel absolu $\Re_a$ et relatif $\Re_r$

4.2.2 Relation entre les vitesses

En dérivant la relation 4.1 par rapport au temps on obtient par définition la vitesse *absolue* :

$$\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{V_a} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}}_{V_e} + \underbrace{\vec{i}'\frac{dx'}{dt} + \vec{j}'\frac{dy'}{dt} + \vec{k}'\frac{dz'}{dt}}_{V_r} \tag{4.2}$$

Les trois derniers termes représentent :
- *La vitesse relative V_r :* C'est la vitesse du point M dans le référentiel relatif $\Re_r$.
- *La vitesse absolue V_a :* C'est la vitesse du point M dans le référentiel absolu $\Re_a$.
- *La vitesse d'entrainement V_e :* C'est la vitesse du référentiel mobile $\Re_r$ par rapport au référentiel absolu ou fixe $\Re_a$.

On a donc la formule fondamentale qui relie les trois vitesses :

$$\boxed{\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r} \tag{4.3}$$

4.3 Transformation du vecteur accélération

Dérivons par rapport au temps l'expression de $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ obtenue au paragraphe précédent :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} &= \left[\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}\right] && \twoheadrightarrow \quad \vec{a}_e \\
&+ \left[i'\frac{d^2x'}{dt^2} + j'\frac{d^2y'}{dt^2} + k'\frac{d^2z'}{dt^2}\right] && \twoheadrightarrow \quad \vec{a}_r \\
&+ 2\left[\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt}\right] && \twoheadrightarrow \quad \vec{a}_c
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Comme nous pouvons le remarquer, la formule de transformation des accélérations est plus compliquée que celle des transformations des vitesses car il s'y introduit un terme de plus, noté a_c, appelé *accélération complémentaire ou de* Coriolis, on écrit :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \tag{4.5}$$

Deux cas particuliers de mouvement relatifs vont nous permettre d'expliquer ces différents termes.

4.4 Mouvement relatif de translation

4.4.1 Définition d'une translation

Un référentiel relatif $(\Re_r)$ est dit en *translation* par rapport à un autre référentiel fixe ou absolu $(\Re_a)$ si les directions liées à $(\Re_r)$ sont fixes dans $(\Re_a)$. Ceci implique que :

$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{i'}}{dt}\right)_{\Re_r} = \frac{d\,\overrightarrow{j'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} = \overrightarrow{0}$$

où (i, j, k) représente la base attachée à $(\Re_r)$, les dérivées étant calculées dans $(\Re_a)$.

On parle de *translation rectiligne* de $(\Re_r)$ par rapport à $(\Re_a)$ si l'origine O' de $(\Re_r)$ a une trajectoire rectiligne par rapport au référentiel absolu $(\Re_a)$ (ce n'est pas le cas sur la figure 4.4).

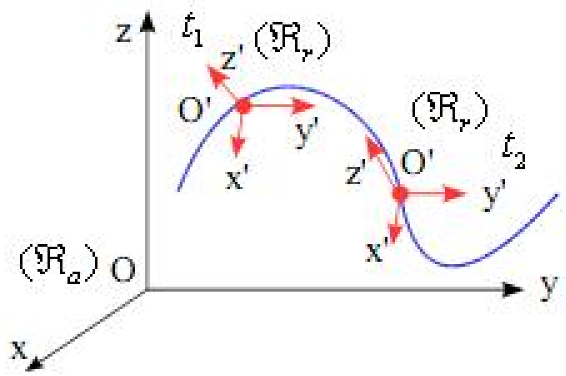


FIGURE 4.3 – Mouvement de translation de $\Re_r$ par rapport à $\Re_a$

4.4.2 Vitesse d'entrainement

Dans le cas d'un mouvement relatif de translation, tous les points de $(\Re_r)$ ont même vitesse d'entrainement, on écrit :

$$\overrightarrow{V}_e = \overrightarrow{V(O')}_{/\Re_a} \tag{4.6}$$

4.4.3 Accélération d'entrainement et accélération de *Coriolis*

Dans le cas d'un mouvement relatif de translation, tous les points ont même accélération d'entrainement.
On a :

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \underbrace{x\frac{d^2\,\overrightarrow{i'}}{dt^2} + y\frac{d^2\,\overrightarrow{j'}}{dt^2} + z\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2}}_{=\overrightarrow{0}}$$

d'où,

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$$

Dans le cas d'un mouvement relatif de translation, l'accélération de *Coriolis* est nulle.

$$\overrightarrow{a}_c = \overrightarrow{0}$$

4.5 Mouvement de rotation autour d'un axe

4.5.1 Position du problème

.

Dans ce cas, le référentiel relatif $(\Re_r)$ tourne autour de l'axe Oz, confondu l'axe $O'Z'$, avec la vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega} = \omega \overrightarrow{k} = \dot{\theta}\ \overrightarrow{k}$ par rapport au référentiel absolu $\Re_a$. Tout point M, fixe dans $(\Re_r)$ est animé d'un mouvement circulaire de vitesse angulaire ω et de rayon $R = HM$.

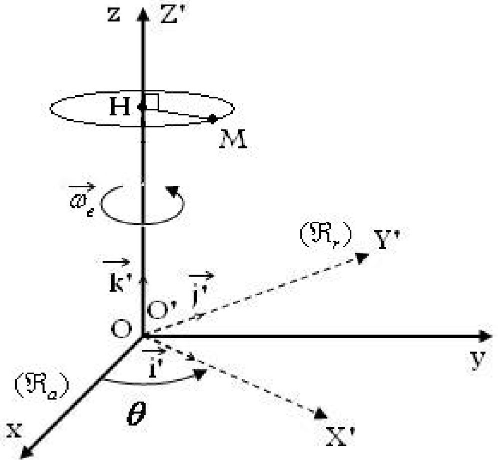


FIGURE 4.4 – Mouvement de rotation de $\Re_r(O', i', j', k')$ autour de $\Re_a(O, i, j, k)$ suivant l'axe commun Oz

D'après la figure, on exprime les vecteurs unitaire de la base liée au repère relatif $\Re_r$ comme suivant :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{i}' &= cos\theta.\overrightarrow{i} + sin\theta.\overrightarrow{j}\\
\overrightarrow{j}' &= -sin\theta.\overrightarrow{i} + cos\theta.\overrightarrow{j}\\
\overrightarrow{k}' &= \overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\frac{d\overrightarrow{i}'}{dt} = \dot{\theta}\ .\overrightarrow{j}' \quad ; \frac{d\overrightarrow{j}'}{dt} = -\ \dot{\theta}\ .\overrightarrow{i}' \quad ; \frac{d\overrightarrow{k}'}{dt} = 0$$

Ou encore :

$$\frac{d\overrightarrow{i}'}{dt} = \overrightarrow{\omega}_e \wedge \overrightarrow{i}' \quad ; \frac{d\overrightarrow{j}'}{dt} = \overrightarrow{\omega}_e \wedge \overrightarrow{j}' \quad ; \frac{d\overrightarrow{k}'}{dt} = \overrightarrow{\omega}_e \wedge \overrightarrow{k}'$$

et

$$\overrightarrow{\omega}_e = \frac{d\theta}{dt}.\overrightarrow{k}' = \dot{\theta}\ .\overrightarrow{k}'$$

4.5.2 Vitesse d'entrainement

En utilisant l'expression générale de V_e (4.2), on aura :

$$\overrightarrow{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\overrightarrow{i}'}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{j}'}{dt} + z'\frac{d\overrightarrow{k}'}{dt}$$

D'après ce qui précède on obtient :

$$\overrightarrow{V}_e = \overrightarrow{\omega}_e \wedge (x'\overrightarrow{i}' + y'\overrightarrow{j}' + z'\overrightarrow{k}')$$

finalement, la vitesse d'entrainement est :

$$\overrightarrow{V}_e = \overrightarrow{\omega}_e \wedge \overrightarrow{O'M} \tag{4.7}$$

4.5.3 Accélération d'entrainement et accélération de *Coriolis*

On part des expressions générales de $\vec{a}_e$ et $\vec{a}_c$ obtenues précédemment :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}$$

et,

$$\vec{a}_c = 2\left[\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt}\right]$$

On utilise les résultats :

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega}_e \wedge \vec{i}' \qquad etc..$$

On obtient finalement les expressions des 2 accélérations :

$$\boxed{\vec{a}_e = \left(\frac{d\vec{\omega}_e}{dt}\right) \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_e \wedge (\vec{\omega}_e \wedge \overrightarrow{O'M})} \tag{4.8}$$

$$\boxed{\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r)} \qquad avec \qquad \vec{V}_r = \vec{V}(M/\Re_r) = \dot{x}'\,\vec{i}' + \dot{y}'\,\vec{j}' + \dot{z}'\,\vec{k}' \tag{4.9}$$

4.6 Cas général

Dans ce dernier paragraphe nous étudions le cas général du mouvement de rotation du référentiel mobile par rapport au référentiel fixe.

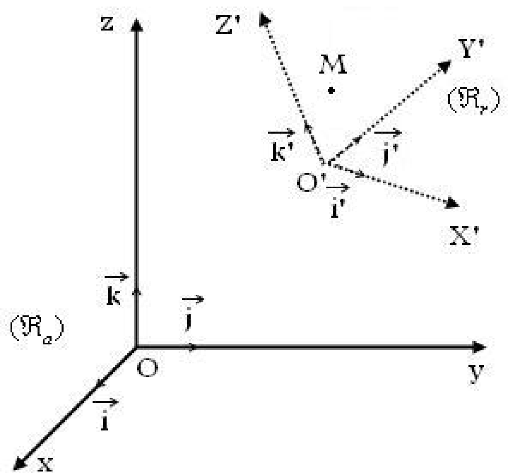


FIGURE 4.5 – Mouvement de rotation de $\Re_r$ par rapport à $\Re_a$

4.6.1 Expression générale de la vitesse d'entrainement

$$\boxed{\vec{V}_e(M/\Re_a) = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}_e \wedge \overrightarrow{O'M}} \tag{4.10}$$

4.6.2 Expression générale des accélérations

Accélération d'entrainement :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left(\frac{d\vec{\omega}_e}{dt}\right) \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_e \wedge (\vec{\omega}_e \wedge \overrightarrow{O'M}) \tag{4.11}$$

Accélération de *Coriolis* :

$$\vec{a}_e = 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r \quad avec \quad \vec{V}_r = \vec{V}(M/\Re_r) \tag{4.12}$$

4.7 Formule fondamentale de la dérivation temporelle dans un repère mobile

Soient deux référentiels $\Re_r$, $\Re_a$. Le référentiel $\Re_r$ étant en mouvement quelconque par rapport au référentiel absolu $\Re_a$. Soit $\vec{\omega}$ la vitesse angulaire de $\Re_r/\Re_a$, définie par :

$$\vec{\omega}(\Re_r/\Re_a) = \vec{\omega}_e$$

Soit $\vec{A}$ un vecteur défini dans le référentiel relatif par :

$$\vec{A} = x'\,\vec{i}' + y'\,\vec{j}' + z'\,\vec{k}'$$

La dérivée du vecteur $\vec{A}$ par rapport au référentiel absolu $\Re_a$ est :

$$\frac{d\vec{A}}{dt}|_{\Re_a} = \dot{x}'\,\vec{i}' + \dot{y}'\,\vec{j}' + \dot{z}'\,\vec{k}' + x'\frac{d\,\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\,\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\,\vec{k}'}{dt}$$

On a vu dans les paragraphes précédents que la dérivée des vecteurs de base par rapport au référentiel absolu s'écrivent :

$$\frac{d\,\vec{i}'}{dt}|_{\Re_a} = \vec{\omega_e} \wedge \vec{i}', \quad \frac{d\,\vec{j}'}{dt}|_{\Re_a} = \vec{\omega_e} \wedge \vec{j}' +, \quad \frac{d\,\vec{k}'}{dt}|_{\Re_a} = \vec{\omega_e} \wedge \vec{k}'$$

d'où,

$$\frac{d\vec{A}}{dt}|_{\Re_a} = \dot{x}'\,\vec{i}' + \dot{y}'\,\vec{j}' + \dot{z}'\,\vec{k}' + x'(\vec{\omega_e} \wedge \vec{i}') + y'(\vec{\omega_e} \wedge \vec{j}') + z'(\vec{\omega_e} \wedge \vec{k}')$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt}|_{\Re_a} = \frac{d\vec{A}}{dt}|_{\Re_r} + \vec{\omega_e} \wedge \vec{A} \tag{4.13}$$

Chapitre 5

Dynamique du point

Dans ce chapitre, nous rappelons d'abord brièvement les principes fondamentaux de la dynamique (les lois de Newton). Ensuite nous verrons les notions de travail et de la quantité de mouvement..etc

⌜ *La dynamique en physique est la science qui étudie la relation entre le corps en mouvement et les causes qui provoquent ce mouvement.* ⌝

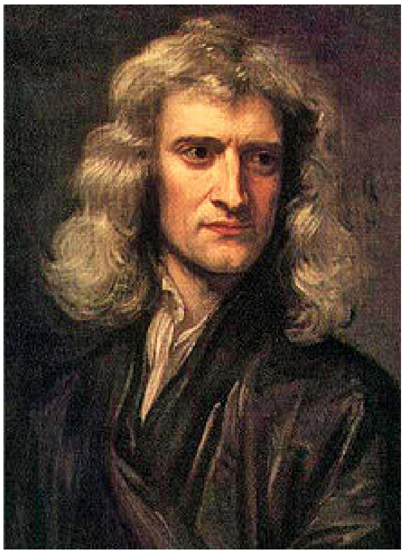


FIGURE 5.1 – *Isaac Newton* (25 décembre 1642 – 20 mars 1727) est un philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien Anglais.

5.1 Les principaux fondamentaux de la dynamique

Toutes les connaissances de la mécanique dite classique sont basées sur les trois lois ou principes, publiés par *Isaac Newton* en 1687. La base de ces principes est expérimentale, c'est-à-dire que leurs énoncés sont les conséquences d'observations faites sur les phénomènes de la nature.

5.1.1 Premier principe : principe d'inertie

ÉNONCÉ :

Une particule ne subissant aucune action extérieure conserve une vitesse constante en amplitude, direction et sens.

La tendance naturelle de tout corps matériel à conserver son mouvement est une propriété générale qu'on appelle **l'inertie**.
Si le corps matériel n'est soumis à aucune force, il est :

— Soit en mouvement rectiligne uniforme,

— Soit au repos, s'il était initialement au repos.

Le premier principe signifie donc qu'un système mécanique en mouvement a une tendance naturelle à conserver son mouvement, à moins qu'un autre système mécanique n'agisse sur lui pour modifier sa vitesse, c'est-à-dire lui communiquer une accélération. On appelle **référentiel galiléen** ou de **référentiel d'inertie** un référentiel dans lequel la trajectoire d'une particule ne subissant aucune force extérieure est rectiligne.

$$\overrightarrow{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v} = Constante$$

1- Quantité de mouvement

DÉFINITION :

La quantité de mouvement d'une particule est le produit de sa masse par son vecteur vitesse instantanée.

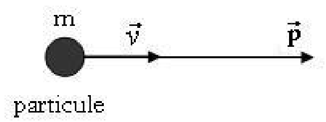


FIGURE 5.2 – Quantité de mouvement

Mathématiquement on écrit :

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v} \tag{5.1}$$

Nous pouvons à présent donner un nouvel énoncé du principe d'**inertie** : *« une particule libre se déplace toujours avec une quantité de mouvement constante »*.

2- Conservation de la quantité de mouvement

ÉNONCÉ :

La quantité de mouvement d'un système isolé constitué de particules est constante

---

Mathématiquement on peut exprimer ce principe de conservation de la quantité de mouvement par :

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}_1 + \overrightarrow{p}_2 + ... + \overrightarrow{p}_n = \Sigma_{i=1}^{n} \overrightarrow{p}_i = C^{ste}$$

5.1.2 Deuxième principe de *Newton*

ÉNONCÉ :

L'accélération d'une particule est directement proportionnelle à la force appliquée sur cette particule et inversement proportionnelle à sa masse.

Cela veut dire que la résultante des forces appliquées à la particule est :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{5.2}$$

Cette équation s'appelle, **équation du mouvement**. Dans le cas où la masse m du mobile est constante (ce qui est toujours le cas en mécanique newtonienne), l'équation 5.2 devient :

$$\vec{F} = \frac{dm\vec{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \tag{5.3}$$

L'unité de la force est : $[kg.m/s^2]$ ou $[N]$ en l'honneur de Sir *Isaac Newton*.

5.1.3 Troisième principe : Principe de l'action et de la réaction

ÉNONCÉ :

Si une particule 1 exerce une force sur une particule 2, alors la particule 2 exerce une force égale et opposée sur la particule 1.

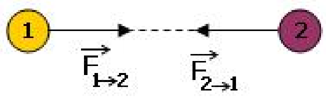


FIGURE 5.3 – Principe d'action et de réaction

On exprime mathématiquement cette loi par :

$$\vec{F}_{1-2} = -\vec{F}_{2-1} \tag{5.4}$$

5.2 Notion de force & Loi de force

5.2.1 Notion de force

DÉFINITION :

La dynamique étudie le mouvement des corps en fonction des forces qui agissent sur eux. Le mouvement va donc dépendre des forces en présence dans chaque situation.

Quatre types de forces fondamentales en physique :

- **Force de gravitation :** toujours attractive, responsable du mouvement des astres, prépondérante à grande échelle ;
- **Force électrique :** entre particules chargées, responsable de la cohésion des atomes et des liaisons chimiques ;
- **Force nucléaire (ou forte) :** responsable de la cohésion des noyaux atomiques ;
- **Force faible :** à l'origine de certaines désintégrations radioactives.

Il y a aussi d'autres forces qui sont habituellement rencontrées en physique et qui sont en quelques sorte des conséquences des quatre forces fondamentales, on cite :

- **Forces de frottement :** frottement sec, frottement visqueux, traînée aérodynamique ;
- **Force magnétique** ;
- **Forces élastiques :** (ressort) ou non susceptibles de déformer les corps matériels ;
- **Le poids :** qui est la force d'attraction que la Terre exerce sur chaque objet ;
- ... etc

5.2.2 Loi de force : ou loi des influences mutuelles

DÉFINITION :
cette loi montre clairement l'expression de la force (la résultante) appliquée à un point matériel dans une situation bien définie.

Exemple :
L'expression $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ est la loi de force qui définit le poids d'un corps au voisinage de la terre et qui nous permet de prédire le mouvement de n'importe quel corps dans le champ de pesanteur terrestre.

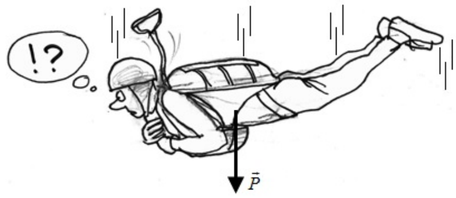


FIGURE 5.4 – Corps en chute libre

5.3 Principe de la gravitation universelle

La loi de la gravitation universelle énoncée par *Newton* en 1685, déduite de l'étude des trajectoires des planètes.

ÉNONCÉ :
Chaque particule de matière attire toute autre particule avec une force de gravitation. Cette force agit comme une attraction selon la direction joignant les positions des particules.

Mathématiquement, on exprime cette force par :

$$\overrightarrow{F} = G\frac{m_1.m_2}{r^2}\overrightarrow{u} \quad où \quad \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_{21} = -\overrightarrow{F}_{12} \quad [N] \tag{5.5}$$

La distance r est alors la distance entre les centres des corps. La constante G s'appelle constante de la gravitation universelle (mesurée expérimentalement par le savant Anglais *Henry Cavendish* en 1798).

$$G = 6.674310^{-11} \qquad [N.m^2/kg^2]$$

Cette constante est extrêmement petite, ce qui explique qu'on ne remarque pas l'action gravifique entre deux objets ordinaires.

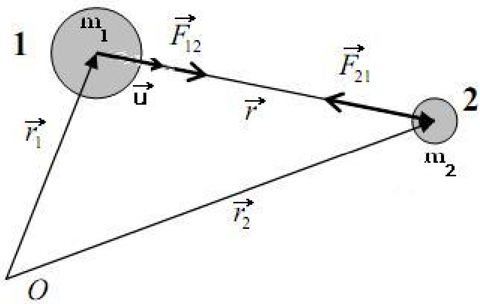


FIGURE 5.5 – Force d'attraction entre les corps 1 et 2

5.3.1 Poids & accélération gravitationnelle

DÉFINITION :
On appelle poids d'un corps, la force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur ce corps.

C'est une force verticale, dirigée vers le bas, qui varie avec le lieu et l'altitude. Cependant les différences d'altitude qui sont à notre portée dans la vie courante sont en général négligeables vis-à-vis du rayon terrestre, ce qui fait que dans la plupart des cas on considère le poids comme constant.
Un corps en chute libre étant soumis à une force de gravitation $\overrightarrow{F}$ en direction du centre de la Terre, il s'ensuit d'après le deuxième principe qu'il subit une accélération dite *accélération terrestre* où m est la masse du corps.

$$\overrightarrow{g} = \frac{\overrightarrow{F}}{m} \qquad [m/s^2] \tag{5.6}$$

En chute libre, la force agissant sur le corps est le *poids*. D'où la définition du poids :

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} \qquad [N]$$

À la surface de la Terre, le module de $\overrightarrow{g}$ d'après l'équation 5.5 vaut :

$$g = \frac{GM}{R^2} \qquad [m/s^2] \quad ou \quad [N/kg] \tag{5.7}$$

M est la masse de la Terre et R sont rayon. La valeur usuelle de g vaut :

$$g = 9.81 m/s^2$$

5.4 Forces de contact et de frottements

5.4.1 Forces de contact

Ces forces comme on l'avait mentionné dans le paragraphe (cf § 5.2) ne font pas partie des 4 forces fondamentales.

DÉFINITION :
Une force de contact est, comme son nom l'indique, celle qui caractérise l'interaction de contact entre éléments matériels. C'est le cas de l'objet posé sur la table. Du point de vue microscopique il y a interaction entre les molécules des deux corps en contact. *Il y a donc une interaction de type électrostatique.*

Les forces $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{F}'$ sont appelées forces de contact ou de liaison à cause du contact des deux corps entre eux.

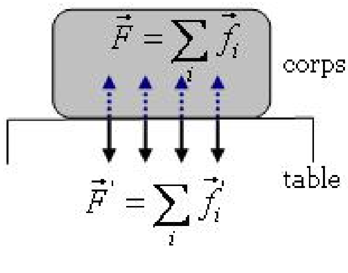


FIGURE 5.6 – Forces de contact

5.4.2 Forces de frottements

Au contact entre deux surfaces rugueuses de deux corps solides, une résistance apparaît alors et s'oppose au mouvement relatif des deux corps. Il existe plusieurs types de frottements :
- Forces de frottements **statique**.
- Forces de frottements **dynamique ou cinétique**.

1- Forces de frottements statique

La force de frottement statique est la force qui maintient le corps en **état de repos** même en présence d'une force extérieure.
Considérons le cas d'un corps au repos, posé sur un plans horizontal (figure 5.7). Le corps étant soumis à quatre forces. Soit $\vec{f}_s$ la force de frottement statique. $\vec{P}$ et $\vec{N}$ sont respectivement le poids et la réaction. $\vec{F}$ la force minimale pour faire bouger le corps.

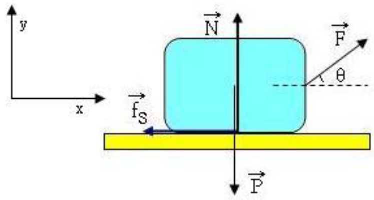


FIGURE 5.7 – Forces de frottements statique - Corps au repos -

Étant donné que le soit au repos : $\Sigma_i \vec{F}_i = \vec{0}$
La projection sur des équations d'équilibre statique sur les axes Ox et Oy donne :

$$\begin{cases} N + F.sin\theta - P &= 0 \\ F.cos\theta - f_s &= 0 \end{cases} \Rightarrow f_s = F.cos\theta$$

Nous pouvons remarquer d'après la première équation que $N \neq P$ car $N = P - F.sin\theta$. Cette force N est la force qui maintient le corps à l'état de repos jusqu'à ce que la force appliquée $\vec{F}$ arrive à le faire bouger. Tout juste avant d'arracher le corps, la force de frottement statique atteint sa valeur maximale définie par la loi :

$$f_s = \mu_s.N$$

où μ_s est le coefficient de frottement statique et N la force normale. Par conséquent :

$$f_s \leq f_{s,max} = \mu_s.N$$

Dans cette exemple, on a :

$$f_{s,max} = \mu_s.N = \mu_s(P - F.sin\theta)$$

En conclusion, pour que le corps reste à l'état de repos (immobile), il faut réaliser les deux conditions suivante :

$$N > 0 \quad et \quad P > F.sin\theta$$

Remarque

Dans le cas où $\theta = 0$ cela implique que : $f_s = F$ et $P = N$.

2- Force de frottement cinétique ou dynamique

DÉFINITION :
La force de frottement cinétique (ou dynamique) est la force qui s'oppose au mouvement du corps sur une surface rugueuse (rude). On l'exprime par :

$$f_c = \mu_c.N$$

Étudions l'exemple précédent dans le cas des forces cinétique :

L'application du principe fondamentale de la statique (**PFS**) permet de déduire l'expression de la force de frottement dynamique :

$$f_c = \mu_c.N = \mu_c(P - F.sin\theta)$$

μ_c est le coefficient de frottement cinétique. Appliquant maintenant le principe fondamentale de la dynamique (**PFD**) :

$$\Sigma_i \overrightarrow{F}_i = m\overrightarrow{a}$$

$$Fcos\theta - f_c = m.a \quad \Rightarrow \quad f_c = m.a - Fcos\theta$$

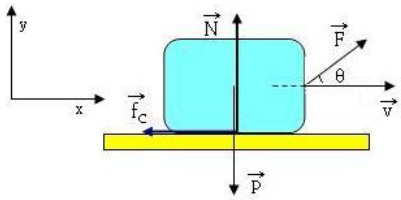


FIGURE 5.8 – Forces de frottements cinétique - Corps en mouvement -

★★*Remarques importantes*

Il faut faire la différence entre les forces de *frottements statique* du corps à l'**état de repos**, et les forces de *frottements cinétique* du corps en **mouvement**.
Dans le cas dynamique on ne parle pas de *force de frottements maximale.*

5.5 Moment d'une force

Soit un axe (Δ) et $\overrightarrow{u}$ son vecteur unitaire et soit O un point de cet axe.

DÉFINITION :
On appelle moment d'une force $\overrightarrow{F}$ appliquée au point M par rapport à l'axe Δ la grandeur scalaire :

$$\mathcal{M}_{\overrightarrow{F}/\Delta} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{F}/O}.\overrightarrow{u} \quad (5.8)$$

$\overrightarrow{M}_{\overrightarrow{F}/O}$ est le moment de la force $\overrightarrow{F}$ par rapport au point O, définit par :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{F}/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} \quad (5.9)$$

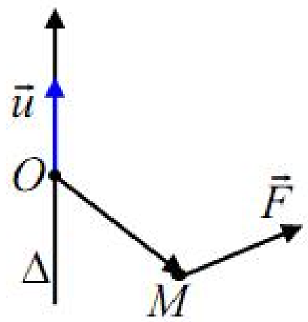


FIGURE 5.9 – Moment d'une force

5.6 Moment cinétique

DÉFINITION :
On appelle moment cinétique d'un point matériel de masse m, de quantité de mouvement p situé au point M par rapport au point O le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{\mathbb{L}}_{/O} = \overrightarrow{r} \wedge m\overrightarrow{V} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p} \quad (5.10)$$

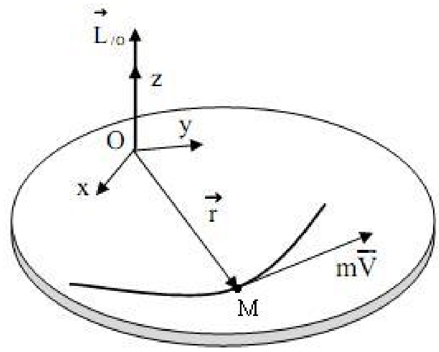


FIGURE 5.10 – Moment cinétique

Le moment cinétique est un vecteur perpendiculaire au plan contenant les vecteurs $\overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{p}$ et orienté de façon à ce que le trièdre ($\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{\mathbb{L}}_{/O}$) soit direct, son module est :

$$\mathbb{L}_{/O} = \|\overrightarrow{r}\|.\|\overrightarrow{p}\| sin\left(\widehat{\overrightarrow{r},\overrightarrow{p}}\right)$$

★★*Remarque importante : Cas d'un mouvement circulaire*

Dans le cas d'un mouvement circulaire de rayon r centré à l'origine, le vecteur position est toujours perpendiculaire à la direction du vecteur vitesse (l'angle $(\widehat{\overrightarrow{r},\overrightarrow{p}}) = \pi/2$) et donc :

$$\overrightarrow{\mathbb{L}}_{/O} = m\overrightarrow{r}.\overrightarrow{V} \qquad \Rightarrow \qquad \|\overrightarrow{\mathbb{L}}_{/O}\| = m.r^2.\omega$$

5.7 Théorème du moment cinétique

Énoncé :

En un point fixe O d'un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel est égal au moment de la force qui lui est appliquée en ce point.

$$\frac{d\overrightarrow{\mathbb{L}}_{/O}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{F}/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} \tag{5.11}$$

5.8 Application à un mouvement à force centrale

5.8.1 Mouvement à force centrale

On appelle un mouvement à force centrale le mouvement d'un point M soumis à une force $\overrightarrow{F}$ passant par un point fixe O (autrement dit, en chaque point M de l'espace, $\overrightarrow{F}$ est *colinéaire* à $\overrightarrow{OM}$). On parle encore d'un point matériel en mouvement dans un champ de force centrale. Ceci se traduit par :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \tag{5.12}$$

Ce type de mouvement correspond au mouvement d'un point soumis à l'attraction d'un astre à symétrie sphérique, ou encore au mouvement d'une particule chargée dans le champs électrostatique d'une charge fixe.

5.8.2 Conservation du moment cinétique & Loi des aires

1- Loi de conservation

Le théorème du moment cinétique appliqué en O à un mouvement à force centrale conduit immédiatement à :

$$\frac{d\overrightarrow{\mathbb{L}}_{/O}}{dt} = 0 \quad soit \quad \overrightarrow{\mathbb{L}}_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p} = C^{ste} \tag{5.13}$$

Autrement dit,

Pour un mouvement à force centrale, le vecteur moment cinétique est une constante du mouvement :

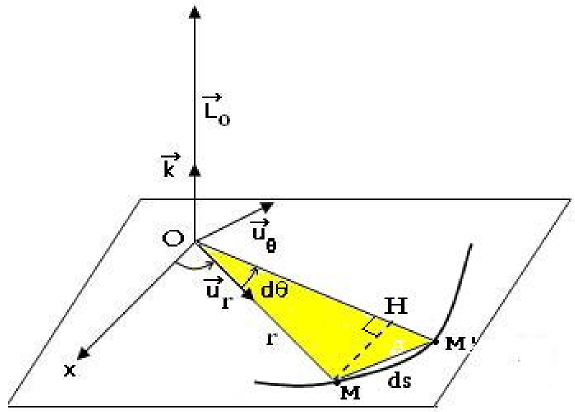
$$\overrightarrow{\mathbb{L}}_{/O} = C^{ste}$$

Cette loi de conservation a des conséquences extrêmement importantes pour l'étude du mouvement, conséquences que nous allons étudier dans ce qui suit.

2- Loi des aires

FIGURE 5.11 – La loi des aires

$MH = rd\theta$



1. ***Le mouvement est plan :*** En effet, $\overrightarrow{\mathbb{L}}_{/O}$ est un vecteur fixe de l'espace et perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$; la trajectoire du point M est donc contenue dans le plan fixe perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$ et passant par le point O. Nous écrivons :

$$\overrightarrow{\mathbb{L}}_{/O} = \mathbb{L}_{/O}\overrightarrow{u}_z$$

2. ***Le mouvement s'effectue suivant la loi des aires :*** Cela veut dire que le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ balaye des aires égales pendant des intervalles de temps égaux. En effet, on exprime $\overrightarrow{\mathbb{L}}_{/O}$ en utilisant un système de coordonnées cylindriques ($\overrightarrow{u}_r$, $\overrightarrow{u}_\theta$, $\overrightarrow{u}_z$), on écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}_r \quad ; \overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\ \overrightarrow{u}_r + r\ \dot{\theta}\ \overrightarrow{u}_\theta \quad ; \overrightarrow{\mathbb{L}}_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p}$$

Soit,

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbb{L}}_{/O} = mr^2\ \dot{\theta}\ \overrightarrow{u}_z} \tag{5.14}$$

On pose,

$$C = r^2\ \dot{\theta} = \frac{\mathbb{L}_{/O}}{m}$$

C est une constante, puisque le moment cinétique est constant. Sur la figure, on voit bien que l'aire balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ pendant un instant dt est approximée comme étant l'aire du demi rectangle de côtés r et $rd\theta$ (surface colorée) :

$$\boxed{dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta} \tag{5.15}$$

Si on divise par dt, on fait apparaitre la *vitesse aréolaire* :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\ \dot{\theta} = \frac{\mathbb{L}_{/O}}{2m} = \frac{C}{2} = C^{ste}$$

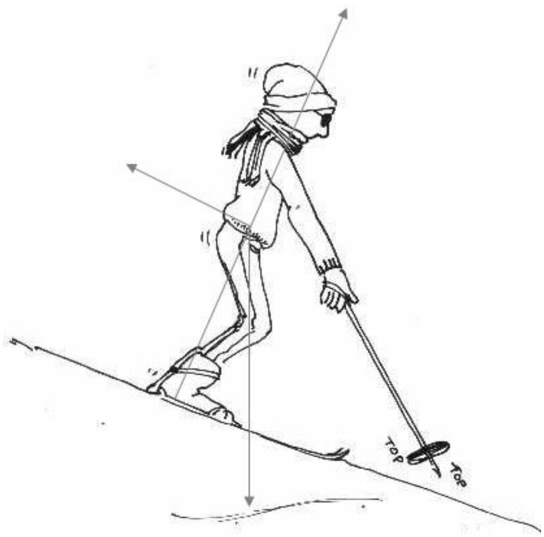
La vitesse aréolaire est donc constante au cours du temps. Ce résultat a été trouvé de manière empirique par ***Johannes Kepler***.

Johannes Kepler (ou *Keppler*), né le 27 décembre 1571 à *Weil der Stadt* et mort le 15 novembre 1630 à *Ratisbonne* dans l'électorat de Bavière, est un astronome *Allemand* célèbre pour avoir étudié l'hypothèse héliocentrique de *Nicolas Copernic*, affirmant que la Terre tourne autour du Soleil et surtout pour avoir découvert que les planètes ne tournent pas autour du Soleil en suivant des trajectoires circulaires parfaites mais des trajectoires elliptiques.

Chapitre 6

Travail & Énergie

⌜ *L'objectif de ce chapitre est de présenter les outils énergétiques utilisés en mécanique pour résoudre des problèmes. En effet, parfois le principe fondamental de la dynamique ne suffit pas ou n'est pas approprié pour parvenir au bout de la résolution. Avant de décrire les différents types d'énergies (énergies cinétique, potentielle et mécanique) et les utiliser dans des théorèmes énergétiques, nous présenterons les notions de puissance et de travail d'une force.* ⌝



6.1 Travail et puissance d'une force

6.1.1 Puissance d'une force

Soit un point M qui se déplace sur sa trajectoire à une vitesse $\overrightarrow{v}(M)$ par rapport au référentiel d'étude, Il subit une force $\overrightarrow{F}$ telle que indiquée sur la figure. Cette force peut être qualifiée de trois sortes :

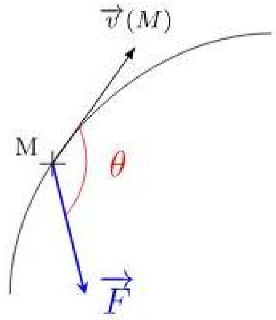


FIGURE 6.1 – Puissance d'une force

La puissance de la force $\overrightarrow{F}$ s'écrit :

$$\mathcal{P}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v}(M) = \|\overrightarrow{F}\|.\|\overrightarrow{v}(M)\|.cos\theta \tag{6.1}$$

- Elle est **motrice**, si sa puissance est positive ce qui correspond à un angle $\theta < \frac{\pi}{2}$
- Elle est **résistante**, si sa puissance est négative ce qui correspond à un angle $\theta > \frac{\pi}{2}$
- Elle peut être de puissance nulle, $\theta = \frac{\pi}{2}$

6.1.2 Travail élémentaire d'une force

On calcule le travail élémentaire de la force $\overrightarrow{F}$ de la manière suivante :

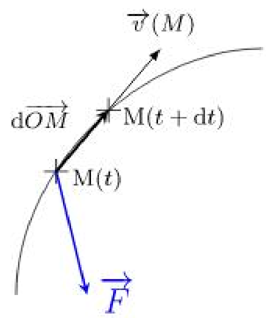


FIGURE 6.2 – Travail élémentaire d'une force

$$\delta\mathcal{W} = \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM} \tag{6.2}$$

Le vecteur $d\overrightarrow{OM}$ sera exprimé en fonction du système de coordonnées choisi. Par exemple en coordonnées cartésiennes on exprime le vecteur :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

soit,

$$d\overrightarrow{OM} = dx\,\overrightarrow{i} + dy\,\overrightarrow{j} + dz\,\overrightarrow{k}$$

6.1.3 Travail d'une force

Généralement le travail d'une force dépend du chemin suivi, c'est pourquoi ce travail élémentaire est nécessaire. Pour obtenir le travail sur un déplacement AB, on intégrera ce travail élémentaire :

$$\boxed{\mathcal{W}_{A-B} = \int_A^B \delta\mathcal{W} = \int_A^B \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM}} \tag{6.3}$$

Cas de force constante :
Lorsque la force est constante (vecteur constant en sens, direction et norme quel que soit le déplacement du point M), celle-ci peut sortir de l'intégration ci-dessus, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{W}_{A-B} = \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM} = F.AB.cos(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{AB})} \tag{6.4}$$

On pourra parler de travail, moteur, résistant ou nul d'une force selon le signe de celui-ci.

6.1.4 Relation entre travail et puissance

À partir du lien entre le vecteur déplacement élémentaire et la vitesse, on peut lier puissance et travail :

$$\mathcal{P} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{\delta\mathcal{W}}{dt}$$

d'où,

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{\delta\mathcal{W}}{dt}} \tag{6.5}$$

6.2 Énergie cinétique

6.2.1 Définition

L'énergie cinétique est l'énergie, en Joule, que possède un corps du fait de sa vitesse :

$$\boxed{\mathbf{E}_c = \frac{1}{2}mv^2} \tag{6.6}$$

Encore une fois, la vitesse de M dépendant du référentiel d'étude, son énergie cinétique en dépendra également.

6.2.2 Théorème de l'énergie cinétique

On se place ici en référentiel galiléen, ceci nous permet d'utiliser la seconde loi de *Newton* :

$$\begin{array}{rcl}
\sum \overrightarrow{F}_{ext} = m\overrightarrow{a} & = & m\dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt} \\
\Leftrightarrow \quad \sum \overrightarrow{F}_{ext}.d\overrightarrow{OM} & = & m\dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt}.d\overrightarrow{OM} \\
\Leftrightarrow \quad \sum \delta W(\overrightarrow{F}_{ext}) & = & m\dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt}.\overrightarrow{v}dt \\
\Leftrightarrow \quad \sum \delta W(\overrightarrow{F}_{ext}) & = & d\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right) \\
 & = & d\mathbf{E}_c
\end{array}$$

On obtient alors la forme différentielle du théorème de l'énergie cinétique :

$$\boxed{\delta\mathcal{W}(\overrightarrow{F}_{ext}) = d\mathbf{E}_c} \tag{6.7}$$

Ou bien en intégrant celle-ci entre deux positions (deux instants) A et B :

$$\boxed{\sum W_{A-B}(\overrightarrow{F}_{ext}) = \Delta \mathbf{E}_c = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2} \tag{6.8}$$

Enfin, on peut exprimer ce théorème en considérant la puissance des forces :

$$\boxed{\sum \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{ext}) = \frac{d\mathbf{E}_c}{dt}} \tag{6.9}$$

6.3 Forces conservatives et énergies potentielles

6.3.1 Définition

Une force est dite conservative lorsque son travail entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position de ces deux points. *Elle dérive alors d'une énergie potentielle*, grandeur qui caractérise énergétiquement le point M dans chaque position. On écrit :

$$\boxed{\mathcal{W}_{A-B} = \mathbf{E}_p(A) - \mathbf{E}_p(B) = -\Delta \mathbf{E}_p} \tag{6.10}$$

En écriture différentielle :

$$\boxed{\delta \mathcal{W} = -d\mathbf{E}_p} \tag{6.11}$$

Le signe est (-) est présent par *définition*. Dans les 2 paragraphes suivant nous expliquons pourquoi.

6.3.2 Interprétation

Les forces conservatives se nomment ainsi car elles laissent constante la somme de l'*énergie cinétique* et de l'*énergie potentielle*. En effet, appliquons le **TEC** dans le cas d'une force conservative :

$$W(\overrightarrow{F}_{conservative}) = \Delta \mathbf{E}_c = -\Delta \mathbf{E}_p \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta(\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_p) = 0} \tag{6.12}$$

6.3.3 Une autre définition d'une force conservative

La définition d'une force conservative de la manière suivante, ne consacre pas que la mécanique :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}(\mathbf{E}_p)} \tag{6.13}$$

où le gradient est un opérateur mathématique qui dépend du système de coordonnées ($Cf.$1.7). Pour donner exemple, écrivons l'opérateur gradient en coordonnées cartésiennes d'une fonction scalaire f :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{dx}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{dy}\overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{dz}\overrightarrow{k}$$

On peut aussi écrire la différentielle de l'énergie potentielle de la façon suivante :

- **À partir de sa relation avec le travail élémentaire :**

$$d\mathbf{E}_p = -\delta \mathcal{W} = -\overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM} = -\left|\begin{array}{c} F_x \\ F_y \\ F_z \end{array}\right. . \left|\begin{array}{c} d_x \\ d_y \\ d_z \end{array}\right.$$

$$\boxed{d\mathbf{E}_p = -F_x d_x - F_y d_y - F_z d_z} \tag{6.14}$$

- **A partir de la définition d'une différentielle :**

$$\boxed{d\mathbf{E}_p = \frac{\partial \mathbf{E}_p}{dx}dx + \frac{\partial \mathbf{E}_p}{dy}dy + \frac{\partial \mathbf{E}_p}{dz}dz} \tag{6.15}$$

Identifions les deux équations 6.14 et 6.15 on obtient :

$$\left| \begin{array}{lcl} F_x & = & -\dfrac{d\mathbf{E}_p}{dx} \\ F_y & = & -\dfrac{d\mathbf{E}_p}{dy} \\ F_z & = & -\dfrac{d\mathbf{E}_p}{dz} \end{array} \right. \Leftrightarrow \overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}(\mathbf{E}_p)$$

6.3.4 Exemples de forces conservatives

1. **Le poids**

   L'exemple le plus classique est le poids qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur. Calculons le travail élémentaire du poids :

   $$\delta W = -d\mathbf{E}_{pp} = \overrightarrow{P}.d\overrightarrow{OM} = -mgdz$$

   En intégrant cette équation :

   $$\mathbf{E}_{pp} = mgz + C^{ste} \tag{6.16}$$

   L'énergie potentielle est donc définie à une constante près, on devra fixer une origine. Ce sera le cas pour tout potentiel.

2. **La force de rappel d'un ressort**

   Soit un ressort de constante de raideur k positionné le long d'un axe Ox horizontal. le support de celui-ci est à gauche, l'axe Ox dirigé vers la droite. L'allongement est $x = l - l_0$. On a : L'intégration de l'équation 6.17 donne :

   $$\delta\mathcal{W} = -d\mathbf{E}_{p_{élastique}} = \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM} = -kxdx \tag{6.17}$$

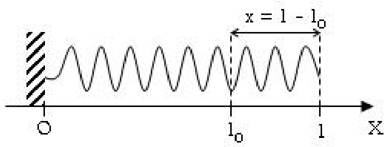


FIGURE 6.3 – Ressort élastique horizontal

$$\mathbf{E}_{p_{élastique}} = \frac{1}{2}kx^2 + C^{ste} \tag{6.18}$$

Résumé :
Une force est ***conservative*** *si son travail sur un déplacement AB ,ne dépend que de la position des points A et B, pas du chemin suivi entre A et B. Par contre une force* ***non conservative*** *comme les forces de frottements, on ne peut pas définir définir l'énergie potentielle correspondante.*
Toute force constante est conservative (ex : poids, force électrique, ...), mais toute force conservative n'est pas forcément constante (ex : force de rappel d'un ressort). Les forces de frottements sont non conservatives.

6.4 Énergie mécanique

6.4.1 Définition

L'énergie mécanique d'un système est définie comme la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_p \tag{6.19}$$

6.4.2 Théorème de l'énergie mécanique

1- Énergie mécanique : Cas de forces non conservative

S'il y a variation de l'énergie mécanique, celle-ci est due aux *forces non conservatives*. On peut donc écrire :

$$\boxed{\frac{d\mathbf{E}_m}{dt} = \mathcal{P}_{non\ cons}} \tag{6.20}$$

Cette expression traduit le **théorème de l'énergie mécanique**.

Démonstration :

Appliquons le *théorème de l'énergie cinétique* (**TEC**) sous forme différentielle à un système soumis à des forces conservatives et non conservatives :

$$\begin{array}{rcl}
d\mathbf{E}_c & = & \delta\mathcal{W}_{totale} \\
 & = & \delta\mathcal{W}_{cons} + \delta\mathcal{W}_{non\ cons} \\
 & = & -d\mathbf{E}_p + \delta\mathcal{W}_{non\ cons} \\
\Leftrightarrow \quad d(\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_p) & = & \delta\mathcal{W}_{non\ cons} \\
\Leftrightarrow \quad d\mathbf{E}_m & = & \delta\mathcal{W}_{non\ cons} \\
\Leftrightarrow \quad \dfrac{d\mathbf{E}_m}{dt} & = & \dfrac{\delta\mathcal{W}_{non\ cons}}{dt} \\
 & = & \mathcal{P}_{non\ cons}
\end{array}$$

2- Énergie mécanique : Cas de forces conservative

Un système soumis à des forces conservatives (ou qui ne travaillent) pas possède une énergie mécanique constante. Mathématique, cela se traduit par :

$$\frac{d\mathbf{E}_m}{dt} = 0 \tag{6.21}$$

Par exemple pour le système masse-ressort, l'énergie mécanique de ce système s'écrit :

$$\begin{array}{rcccl}
\mathbf{E}_m & = & \mathbf{E}_c & + & \mathbf{E}_p \\
\mathbf{E}_m & = & \dfrac{1}{2}mv^2 & + & \dfrac{1}{2}kx^2 = C^{ste}
\end{array}$$

La dérivation de l'expression de l'énergie mécanique du système masse-ressort donne l'*équation différentielle du mouvement* :

$$\frac{d\mathbf{E}_m}{dt} = m\,\dot{x}\ddot{x} + kx\,\dot{x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

6.5 Notion d'équilibre, énergie potentielle et stabilité

6.5.1 Notion d'équilibre

Un point matériel M de masse m est en équilibre lorsque toutes les forces qui s'exercent sur lui se compensent :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{0}$$

En effet, la vitesse du point M est nulle, son accélération est par conséquent nulle donc d'après le **PFD**, la somme des forces est nulle.

6.5.2 Énergie potentielle et positions d'équilibre

Soi un point matériel M soumis uniquement à des forces conservatives. On note $\overrightarrow{F}$ la somme de ces forces et $\mathbf{E}_p$ l'énergie potentielle globale dont dérivent ces forces conservatives. On suppose que cette énergie $\mathbf{E}_p$ ne dépend que d'une seule variable (x par exemple).
On recherche les positions d'équilibres du point M :

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}\mathbf{E}_p = 0$$

Comme l'énergie potentielle ne dépend que de la coordonnées x dans cet exemple, on résout l'équation :

$$\frac{d\mathbf{E}_p}{dx} = 0$$

*Les positions d'équilibre d'un système correspondent à un **extrémum** (minimum ou maximum) de l'énergie potentielle.*

6.5.3 Stabilité des équilibres

Deux positions d'équilibre stable :

- Position d'équilibre stable correspond à un **maximum** d'énergie potentielle :

$$\frac{d\mathbf{E}_p}{dx} < 0$$

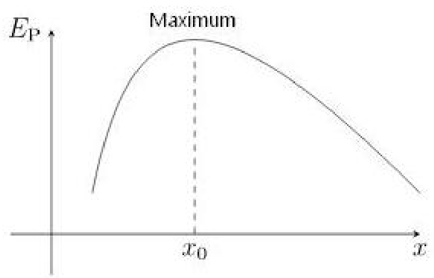


FIGURE 6.4 – Positions d'équilibre "*maximum*" en fonction du profil de $\mathbf{E}_p$

- Position d'équilibre stable correspond à un **minimum** d'énergie potentielle :

$$\frac{d\mathbf{E}_p}{dx} > 0$$

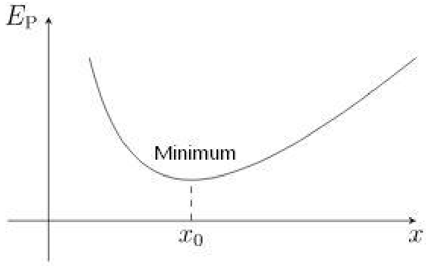
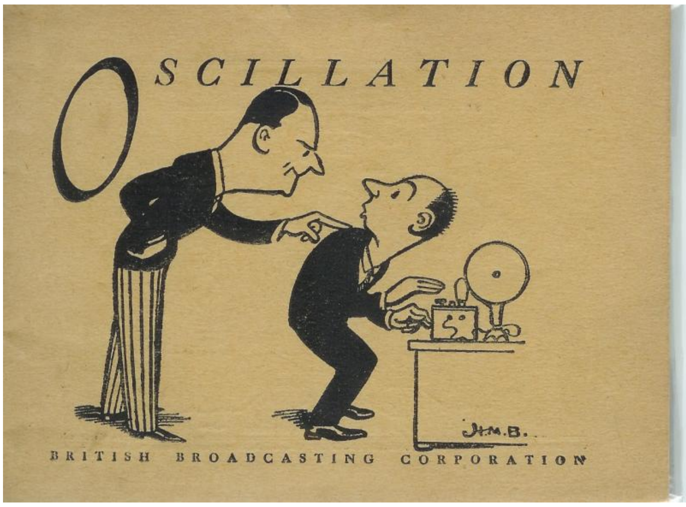


FIGURE 6.5 – Positions d'équilibre "*minimum*" en fonction du profil de $\mathbf{E}_p$

Chapitre 7

Oscillateurs mécaniques

⌜ *Dans ce chapitre nous étudierons en premier lieu l'oscillateur harmonique masse-ressort horizontale, nous introduirons donc la force de rappel du ressort et nous découvrirons l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique et sa solution. L'oscillateur masse-ressort vertical sera ensuite abordé : tout d'abord, ce sera l'occasion de retrouver l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique, puis nous introduirons l'amortissement (frottements fluides) pour voir le comportement du système. Enfin, nous aborderons un oscillateur à deux dimensions, le pendule simple. Cela permettra l'introduction de la base de projection polaire.* ⌝



7.1 Oscillateur harmonique horizontal : Mouvement sans frottements

7.1.1 Position du problème

Soit un point M de masse m accroché à l'extrémité d'un ressort horizontal sans masse. Le point M se déplace sans frottement sur le plan horizontal. A $t = 0$, on écarte ce point de sa position d'équilibre d'une grandeur x_m puis on le lâche sans vitesse initiale. Dans cette étude on cherche à savoir le mouvement, et les caractéristiques du système en question.

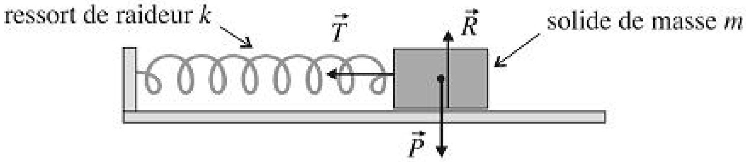


FIGURE 7.1 – Oscillateur harmonique horizontal

7.1.2 Description du système

- **Système étudié :**

  Le point M de masse m : masse ponctuelle.
- **Référentiel et base de projection :**

  Référentiel lié au plan horizontal sur lequel se déplace le point M, référentiel terrestre considéré comme galiléen. On prendra une base cartésienne à une dimension : un axe Ox horizontal permettra de repérer le point M.
- **Inventaire des forces (ou bilan des forces) :**

  La masse m est soumise :

  — $\overrightarrow{P}$: Le poids, force verticale orientée vers le bas.
  — $\overrightarrow{R}$: La réaction du support, force verticale orientée vers le haut car il n'y a pas de frottement avec le plan horizontal.
  — $\overrightarrow{\mathcal{F}}$: La force de rappel du ressort, force horizontale.

  La force de rappel est proportionnelle à l'*allongement du ressort* et à une *constante* qui caractérise la raideur du ressort, k appelée *constante de raideur*. L'allongement du ressort à un instant t est défini par :

  $$\mathcal{F}[N] = \mathrm{k} \times allongement \quad \text{où} \quad allongement = l - l_0 \tag{7.1}$$

  l est la longueur du ressort à l'instant t et l_0 sa longueur à vide c'est à dire au repos.
- **Expression vectorielle de la force de rappel du ressort :** $\overrightarrow{\mathcal{F}}$

  Pour donner exemple (voir figure 7.2), nous allons prendre l'origine de l'axe des abscisses coïncide avec la longueur à vide du ressort. Ainsi, l'allongement du ressort est repéré par l'abscisse x, avec $x = l - l_0$ (Fig.7.2 schéma 1).
  Deux situations différentes du ressort seront étudiées ici : situation de **compression** (Fig.7.2-schéma 2) et situation d'**étirement** (Fig.7.2-schéma 3).

Question : La force de rappel du ressort $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ aura-elle la même expression vectorielle dans les deux situations ?

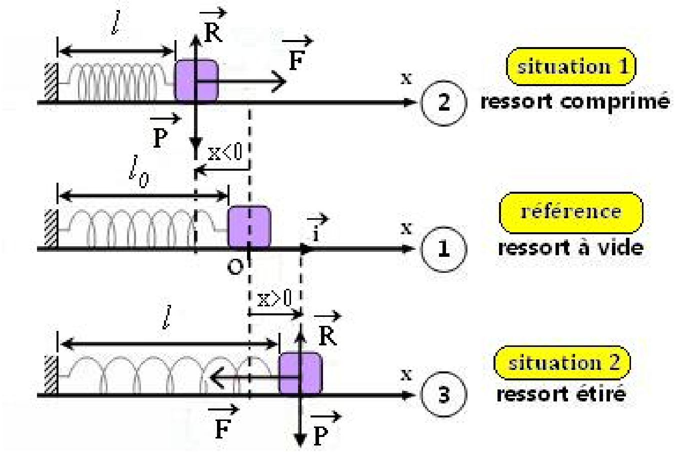


FIGURE 7.2 – Force s'exerçant sur la masse accrochée au ressort horizontal

1. **Situation de compression : Situation 1**
   Le ressort est comprimé, l'allongement est négatif, la force $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ est dirigé dans le sens de l'axe Ox donc :
   $$\overrightarrow{\mathcal{F}} = -\mathrm{k}(l - l_0)\overrightarrow{\mathrm{i}} = -\mathrm{k}x\overrightarrow{\mathrm{i}}$$
   où k est la force de rappel du ressort, son unité est $[N.m^{-1}]$.

2. **Situation d'étirement : Situation 2**
   Le ressort est étiré, l'allongement est positif, mais la force $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ est dirigé dans le sens inverse de l'axe $\overrightarrow{\mathrm{i}}$.
   $$\overrightarrow{\mathcal{F}} = -\mathrm{k}(l - l_0)\overrightarrow{\mathrm{i}} = -\mathrm{k}x\overrightarrow{\mathrm{i}}$$

En résumé :

Quelque soit la situation du ressort, la force de rappel du ressort s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathcal{F}} = -\mathrm{k}(l - l_0)\overrightarrow{\mathrm{i}} = -\mathrm{k}x\overrightarrow{\mathrm{i}} \qquad (7.2)$$

7.2 Équation différentielle du mouvement

L'équation différentielle du mouvement s'obtient en appliquant la seconde loi de *Newton* (ou **PFD**) :

$$\begin{aligned} \sum \overrightarrow{\mathcal{F}}_{ext} &= m\overrightarrow{\mathrm{a}} \\ \overrightarrow{\mathrm{P}} + \overrightarrow{\mathrm{R}} + \overrightarrow{\mathrm{F}} &= m\overrightarrow{\mathrm{a}} \end{aligned}$$

Projetons sur l'axe Ox :

$$\Rightarrow -\mathrm{k}x = m\,\ddot{x}$$

Divisons cette équation :

$$\ddot{x} + \frac{\mathrm{k}}{m}x = 0 \qquad (7.3)$$

Cette équation différentielle s'appelle *équation du mouvement*

7.3 Solution de l'équation du mouvement et caractéristiques

7.3.1 Notion de pulsation propre et de période propre

L'équation différentielle de mouvement 7.3 s'écrit généralement de la manière suivante :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{7.4}$$

où, $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathrm{k}}{m}}$ appelée *pulsation propre*. La *période propre* s'écrit $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

7.3.2 Expression de la solution

Mathématiquement, l'équation différentielle 7.4 a pour solution une fonction sinusoïdale de la forme :

$$\mathrm{x}(t) = \mathrm{A}cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{7.5}$$

A et φ sont des constantes déterminées à partir des conditions initiale (à l'origine des temps $t = 0$). la constante A est appelé *amplitude* et s'exprime en *mètre* (m) et φ *phase* à l'origine exprimée en *radian* (rad).

Exemple : **Détermination des constantes A et φ**

Pour cela on prend les conditions initiale à l'origine des temps $t = 0$ suivantes :

$$x(t=0) = x_m \quad et \quad \mathrm{A}(t=0) = 0$$

En remplaçant dans l'équation 7.5 on obtient :

$$à \quad t = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t=0) = x_m = \mathrm{A}cos\varphi$$

Pour la vitesse : $\mathrm{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega_0 \mathrm{A}sin(\omega_0 t + \varphi)$

$$à \quad t = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v(t=0)} = -\omega_0 \mathrm{A}sin(\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \quad sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \varphi = 0, \pi \quad (\mathrm{A} \neq 0,\ \omega_0 \neq 0)$$

Finalement, on trouve : $\mathrm{A} = x_m$, prenons $\varphi = 0$
La solution finale s'écrit donc :

$$\mathrm{x}(t) = x_m cos(\omega_0 t) \tag{7.6}$$

7.3.3 Allure de la solution

Les oscillations du point M sont sinusoïdales d'amplitude x_m et de période propre T_0 (voir figure 7.3)

Ce qui faut retenir

Pour un oscillateur harmonique, l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad avec \quad \omega_0^2 = \frac{\mathrm{k}}{m}$$

L'oscillateur est qualifié d'harmonique car ses oscillations sont d'amplitude constante, et de période propre également constante dont la valeur ne dépend que des caractéristiques du système solide-ressort.

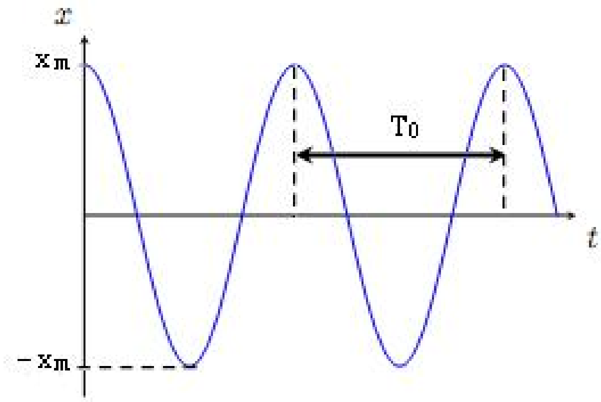


FIGURE 7.3 – Oscillations harmoniques

La solution de cette équation donne l'allure des oscillations :

$$\mathrm{x}(t) = \mathrm{A}cos(\omega_0 t + \varphi)$$

7.4 Oscillateur harmonique vertical : Mouvement sans frottements

7.4.1 Position du problème

Soit un point matériel M de masse ponctuelle m accroché à l'extrémité d'un ressort vertical sans masse. À $t = 0$, on écarte ce point de sa position d'équilibre d'une grandeur x_m puis on le lâche sans vitesse initiale et sans frottement. Quel seront donc son mouvement et ses caractéristiques ?

7.4.2 Équation différentielle du mouvement

Le système étudié est représenté dans la figure 7.4. On prend le référentiel terrestre et galiléen. On choisira une base cartésienne à une dimension, un axe Ox, vertical descendant.

Pour obtenir l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur vertical, on applique les principes fondamentaux :

- *À l'équilibre (situation 2) : Le Principe fondamental de la statique **PFS** s'écrit :*

La masse est soumise aux deux forces : $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ (l'une compense l'autre).

$$\overrightarrow{\mathrm{P}} + \overrightarrow{\mathrm{T}} = \overrightarrow{0}$$

La projection sur l'axe Ox donne :

$$mg - \mathrm{k}(l_{éq} - l_0) = 0 \tag{7.8}$$

- *À l'instant t (situation 3) : Le Principe fondamental de la dynamique **PFD** s'écrit :*

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} &= mg - \mathrm{k}(l - l_0) \\ m\,\ddot{x} &= mg - \mathrm{k}(x + l_{éq} - l_0) \qquad \text{où} \qquad l = x + l_{éq} \\ m\,\ddot{x} &= -\mathrm{k}x + \underbrace{mg - \mathrm{k}(l_{éq} - l_0)}_{=0} \end{aligned}$$

On prend l'origine de l'axe des abscisses ne coïncide pas avec la longueur à vide du ressort :

$$x = l - l_0$$

On exprime la force de tension en fonction de l'allongement par :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{T}} = -\mathrm{k}(l - l_0)\,\overrightarrow{\mathrm{i}}} \qquad (7.7)$$

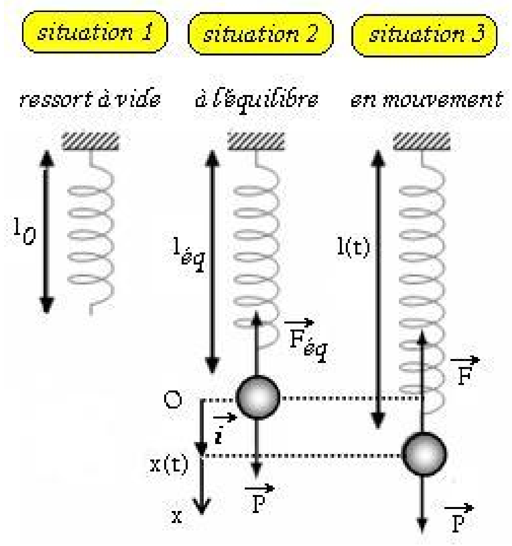


FIGURE 7.4 – Oscillations d'une masse suspendue à un ressort vertical

Finalement, on obtient l'équation du mouvement recherchée :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\mathrm{k}}{m}x = 0}$$

On retrouve donc la même équation que celle obtenue pour le ressort horizontal, la solution sera identique.

7.5 Étude du pendule simple

7.5.1 Position du problème

Une fillette, assimilé à un point matériel M de masse m, est assis sur une balançoire. Les cordes de la balançoire sont inextensibles, de longueur l et n'ont pas de masse. Un adulte écarte d'un petit angle la fillette de sa position d'équilibre puis la lâche sans vitesse initiale, la balançoire oscille. On néglige tous les frottements. Quel est le mouvement de la fillette ? les caractéristiques de celui-ci ?

FIGURE 7.5 – Balançoire

On choisira un référentiel lié à un observateur posé, par exemple, sur le support de la balançoire. C'est un référentiel terrestre supposé galiléen le temps du mouvement de la fillette (assimilée à un point matériel). Le mouvement de la masse est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, le repérage du mouvement de la masse sera par un angle. L'utilisation de la base polaire *mobile* $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ dans le cas de pendule simple est judicieuse.
On repère alors le point M par une longueur, ici ℓ, et par un angle θ.

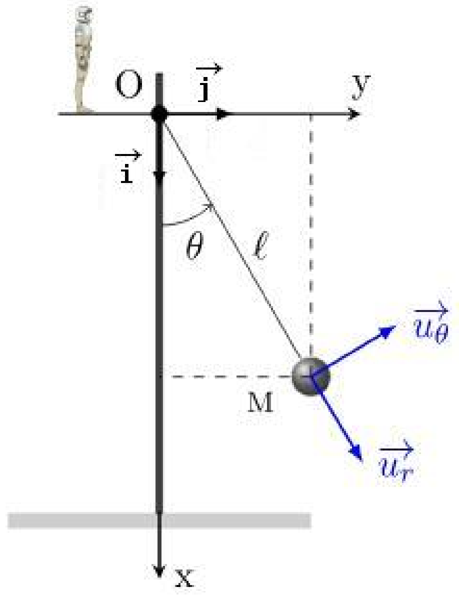


FIGURE 7.6 – Pendule simple et base polaire

7.5.2 Référentiel et base

1- Relations de passages :

On rappelle les relations de passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes (*cf.*§ 2.3) qui expriment les vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ en fonction des vecteurs unitaires de la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\vec{u}_r = cos\theta\,\vec{i} + sin\theta\,\vec{j} \qquad ; \qquad \vec{u}_\theta = -sin\theta\,\vec{i} + cos\theta\,\vec{j}$$

2- Expressions des vecteurs : Position, vitesse et accélération en coordonnées polaires

★ **Vecteur position :**

$$\overrightarrow{OM} = \ell\vec{u}_r$$

★ **Vecteur vitesse :**

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(\ell\vec{u}_r)}{dt} = \frac{d\ell}{dt}\vec{u}_r + \ell\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

Or,

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \times \dot{\theta}$$

D'après la première relation de passage précédente :

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -sin\theta\,\vec{i} + cos\theta\,\vec{j} = \vec{u}_\theta$$

Finalement,

$$\boxed{\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta}$$

L'expression donc du vecteur vitesse s'écrit :

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\ell}\,\vec{u}_r + \ell\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta}$$

★ **Vecteur accélération :**

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

Comme pour le calcul du vecteur vitesse on calcule le vecteur accélération :

$$\boxed{\overrightarrow{a} = (\ddot{\ell} - \ell\,\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u}_r + (2\,\dot{\ell}\dot{\theta} + \ell\,\ddot{\theta})\overrightarrow{u}_\theta}$$

7.5.3 Équation différentielle du mouvement

1- Inventaire des forces appliquées

Deux forces s'exercent au point M de la masse :
— $\overrightarrow{P}$: Le poids, force verticale vers le bas ;
— $\overrightarrow{T}$: La tension du fil force colinéaire au fil et dirigée vers l'axe de rotation.

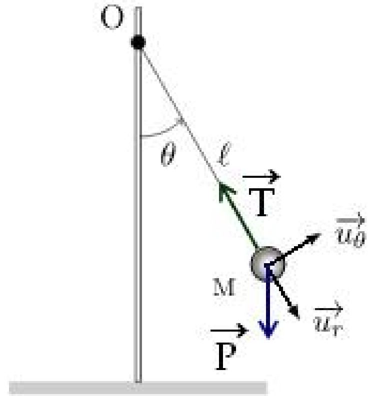


FIGURE 7.7 – Bilan des forces

2- Seconde loi de *Newton*

On applique le **PFD** au point M, exprimé dans la base polaire :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} = m\overrightarrow{a} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcrcl} \textit{Projection sur } \overrightarrow{u}_r & : & \mathrm{m.g.}cos\theta - \mathrm{T} & = & \mathrm{m}(\ddot{\ell} - \ell\,\dot{\theta}^2) \\ \textit{Projection sur } \overrightarrow{u}_\theta & : & -\mathrm{m.g.}sin\theta & = & \mathrm{m}(2\,\dot{\ell}\dot{\theta} + \ell\,\ddot{\theta}) \end{array} \right.$$

Étant donné que le fil est inextensible ceci implique que : $\dot{\ell} = 0$, d'où :

$$\left\{ \begin{array}{lcrcl} \textit{Projection sur } \overrightarrow{u}_r & : & \mathrm{m.g.}cos\theta - \mathrm{T} & = & -\mathrm{m}\ell\,\dot{\theta}^2 \\ \textit{Projection sur } \overrightarrow{u}_\theta & : & -\mathrm{m.g.}sin\theta & = & \mathrm{m}\ell\,\ddot{\theta} \end{array} \right.$$

3- Équation différentielle du mouvement

Le mouvement de rotation du pendule simple s'effectue autour d'un axe fixe, seule la composante suivant $\overrightarrow{u}_\theta$ nous donne l'équation différentielle du mouvement. On se placant dans le cadre des petites oscillations $sin\theta \approx \theta$. On trouve :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\mathrm{g}}{\ell}\theta = 0} \tag{7.9}$$

La pulsation et la période propres du pendule :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathrm{g}}{\ell}} \quad [rad.s^{-1}]; \qquad \mathrm{T}_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad [s]$$

4- Solution de l'équation du mouvement

La solution est de la forme suivante :

$$\theta = \theta_m cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{7.10}$$

Elle montre bien que le pendule simple est un oscillateur harmonique.

7.6 Système masse-ressort avec amortissement

On reprend l'exemple des oscillateurs précédents : système masse-ressort horizontal ou vertical, ou balançoire. Mais cette fois-ci, on tiendra compte des amortissement dus aux *frottements fluides* qui freinent le point M dans son mouvement. Dans ce cas, comment le mouvement sera modifié ? quelles sont ces nouvelles caractéristiques ?

7.6.1 Équation différentielle du mouvement

Prenons le cas d'un oscillateur horizontal de la figure 7.2, la masse accrochée au ressort est maintenant soumise en plus des forces déjà évoquées à une force de *frottement fluide* d'expression $\overrightarrow{f} = -\alpha \overrightarrow{v}$. L'équation différentielle régissant le mouvement de la masse s'obtient en appliquant le **PFD** et en projetant sur l'axe colinéaire du ressort :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{f} = m\overrightarrow{a}$$

Projection sur l'axe Ox :

$$m \ddot{x} = -\mathrm{k}x - \alpha \dot{x}$$

L'équation différentielle du mouvement est de la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{\mathrm{k}}{m} x = 0 \tag{7.11}$$

Réécrirons cette équation en fonction de la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathrm{k}}{m}}$ et du facteur $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$:

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{7.12}$$

7.6.2 Solution de l'équation différentielle

Dans ce paragraphe on va montrer la procédure de résolution de l'équation différentielle de mouvement 7.12.

1- Équation caractéristique

Une équation différentielle du type de l'équation 7.12 se résout à partir de son *équation caractéristique* qui s'écrit de la forme :

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

La résolution de l'équation caractéristique revient à calculer son discriminant $\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2$. Les solutions sont r_1 et r_2.

2- Solution

À partir des racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique, on construit la solution de la manière suivante :

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \tag{7.13}$$

La nature de r_1 et r_2 et de A et B dépend du *signe du discriminant* Δ de l'équation caractéristique : selon ce signe, on obtient *différents régimes*.

3- Régime pseudo-périodique : $\Delta < 0$

Le discriminant est négatif :

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda < \omega_0$$

Les deux solutions (racines) de l'équation caractéristique r_1 et r_2 sont complexes et conjuguées entre elle :

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda \pm \mathrm{i}\omega \quad ; (\mathrm{i}^2 = -1) \tag{7.14}$$

Le paramètre $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ est appelé *pseudo-pulsation des oscillations amorties*. La solution $x(t)$ du régime pseudo-périodique s'écrit :

$$x(t) = A.e^{-\lambda t}cos(\omega t + \varphi) \tag{7.15}$$

A et φ sont des constantes à déterminer avec les conditions initiales.

Dans le cas du régime pseudo-périodique le mouvement de l'oscillateur s'amortit au cours du temps. L'allure du mouvement est représentée sur la figure.
On définit la pseudo-période T par :

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

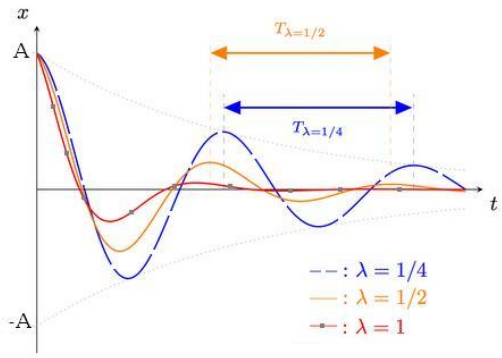


FIGURE 7.8 – Oscillations pseudo-périodiques

4- Régime critique : $\Delta = 0$

Ce régime s'obtient lorsque le discriminant Δ de l'équation caractéristique associé à l'équation différentielle vaut 0. On alors $\lambda = \omega_0$ Ce régime est celui qui permet à l'oscillateur de revenir le plus rapidement à l'équilibre.

5- Régime apériodique : $\Delta > 0$

Le discriminant est positif :

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda > \omega_0$$

Dans ce cas, les solutions de l'équation caractéristique sont réelles et opposées et s'écrivent :

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \tag{7.16}$$

Dans ce régime, la solution s'écrit :

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \tag{7.17}$$

Dans ce régime il n'y a pas d'oscillations d'où le nom du régime apériodique.

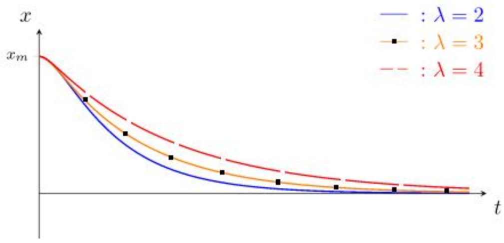
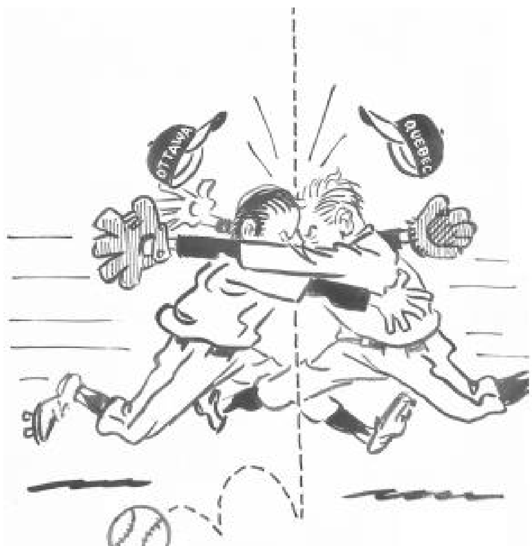


FIGURE 7.9 – Régimes apériodiques

Chapitre 8

Étude des collisions

⌜ *Après avoir étudié le mouvement d'un point matériel, on peut considérer le système à N points matériels le plus simple : le système à deux corps. En physique, ce problème a deux corps est très important, on peut remarquer que les forces que nous connaissons sont des forces qui s'exercent entre deux corps (gravitation, force électromagnétique, ...). Aussi, on rencontre souvent dans la nature des systèmes physiques à deux corps : la Terre et la Lune, l'électron et le proton dans un atome d'hydrogène, une molécule diatomique de gaz ⋯*
Après avoir exposé le problème de façon générale, nous nous limiterons aux systèmes à deux corps isolés entre lesquels s'exerce une force d'interaction. ⌝



8.1 Position du problème

Nous intéressons dans ce chapitre au cas où les deux corps qui entrent en collision ne subissent pas de forces extérieures.

DÉFINITION :
Une collision est un choc direct entre deux objets. Un tel impact transmet une partie de l'énergie et de l'impulsion de l'un des corps au second.

Le terme collision est à prendre au sens large, il n'y a pas forcément contact physique entre les corps (interaction répulsive). On emploiera néanmoins indifféremment les mots collision ou choc. Ce qui est intéressant n'est pas l'interaction qui produit la collision : on considèrera que celle-ci se produit à courte portée et pendant un temps très court.
On cherche pas à connaître la nature de cette interaction mais uniquement les caractéristiques des corps avant et après collision.
On considèrera pour ce qui suit que la masse des corps est constante et que leur nombre ne varie pas.
Avant de passer à l'étude des collisions, il est préalable de rappeler quelques définitions essentielles.

8.2 Éléments cinétiques

8.2.1 Centre d'inertie du système

Soit deux points M_1 et M_2 de masse respective m_1 et m_2 en interaction et en mouvement dans un référentiel $(\Re)$ de centre O. Le *centre d'inertie du système* est le barycentre des points M_1 et M_2 affectés de leur masse.

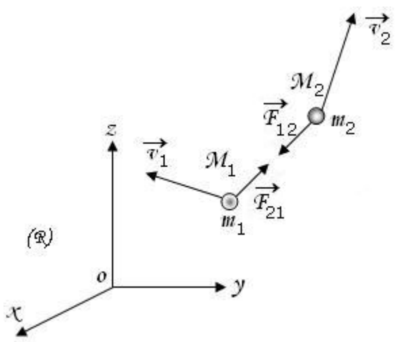


FIGURE 8.1 – Système de deux points en interaction

Considérons que G est le centre de masse du système :

$$\begin{aligned} (m_1+m_2)\overrightarrow{OG} &= m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2 \\ \Leftrightarrow \quad m_1\overrightarrow{GM}_1 + m_2\overrightarrow{GM}_2 &= \overrightarrow{0} \end{aligned} \tag{8.1}$$

8.2.2 Résultante cinétique

On appelle *résultante cinétique* la somme des quantités de mouvement des point M_i par rapport au référentiel $(\Re)$:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \tag{8.2}$$

Dans le cas de deux points l'équation 8.2 devient :

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

D'après la définition du centre d'inertie, on montre que cette résultante cinétique est égale à :

$$\vec{p} = (m_1 + m_2)\vec{v}_G$$

En résumé, la résultante cinétique du système est la quantité de mouvement d'un point fictif situé en G qui porte toute la masse du système.

8.2.3 Moment cinétique

On définit le *moment cinétique* du système des deux points M_1 et M_2 par rapport, au point O :

$$\vec{\mathbb{L}}_{/O} = \overrightarrow{OM}_1 \wedge m_1\vec{v}_1 + \overrightarrow{OM}_2 \wedge m_2\vec{v}_2 \tag{8.3}$$

8.2.4 Centre barycentrique

Le *référentiel barycentrique*, noté $(\Re^*)$, est le référentiel lié au centre de gravité G du système de points matériels et animé d'une vitesse $\vec{v}_G$ par rapport au référentiel $(\Re)$. Le référentiel barycentrique, est généralement *non galiléen*.

8.2.5 Théorème de la résultante cinétique

Ce théorème remplace le principe fondamental de la dynamique (seconde lois de *Newton*), pour des systèmes à N points matériels. On écrit :

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}} \tag{8.4}$$

Ce sont bien les forces extérieures qui interviennent dans ce théorème, ce ne sont pas les forces d'interaction entre les corps M_1 et M_2.

Remarque :

Si le système de points matériels est isolé (c-à-d qu'aucune force extérieur ne s'exerce sur celui-ci) alors :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} = (m_1 + m_2)\vec{v}_G = \overrightarrow{C^{ste}}$$

Dans ce cas la vitesse du centre d'inertie est constante dans le référentiel $(\Re)$, G est animé d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport à $(\Re)$: le référentiel barycentrique est dans ce cas galiléen.

8.3 Théorème du moment cinétique

On définit le théorème du moment cinétique pour un système de N points par :

$$\frac{d\vec{\mathbb{L}}_{/O}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}_{ext}) \tag{8.5}$$

Pour un système isolé :

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}_{ext}) = \vec{0}$$

Le moment cinétique du système dans ce cas se conserve.

8.4 Étude des chocs élastiques

Dans ce qui suit on se restreint au cas de collision (choc) élastique de deux corps ponctuels. Les hypothèses notées au début du chapitre (C.f § 8.1) restent valides dans toute la suite.

8.4.1 Conservation de la quantité de mouvement

Si on considère le système des deux corps ne subissant pas de force extérieure, le théorème de la résultante cinétique donne :

$$\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{p} = \overrightarrow{C^{ste}}$$

Cela veut dire que, si les quantités de mouvement $\overrightarrow{p}_1$ et $\overrightarrow{p}_2$ des deux corps avant la collision, et $\overrightarrow{p}'_1$ et $\overrightarrow{p}'_2$ les quantités de mouvement après la collision, on écrit :

$$\overrightarrow{p}_1 + \overrightarrow{p}_2 = \overrightarrow{p}'_1 + \overrightarrow{p}'_2 \tag{8.6}$$

Cas où l'une des deux particules est immobile :
Dans cette configuration, on obtient une information supplémentaire : tout se passe dans un plan. En effet, si le corps 2 est *immobile*, la relation 8.6 devient

$$\overrightarrow{p}_2 = \overrightarrow{p}'_1 + \overrightarrow{p}'_2$$

un des vecteurs étant la somme des deux autres, la collision est donc plane comme montré sur la figure.

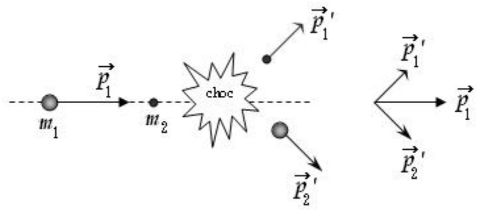


FIGURE 8.2 – Un des deux corps est initialement immobile : collision plane

8.5 Collision élastique

DÉFINITION :
Une collision est dite élastique lorsqu'en plus de la conservation de la quantité de mouvement, il y a conservation de l'énergie cinétique des particules. Cela se produit quand il n'y a pas de déformation des corps, pas d'augmentation de leur énergie interne.
Objectif : *L'objectif de cette étude est de trouver les vitesses des corps après le choc.*

8.5.1 Collision élastique directe ou unidimensionnel (1D)

1- Cas général

Considérons que les deux corps qui entrent en collision sont en mouvement suivant un axe horizontal.

Cherchons maintenant les vitesses $\overrightarrow{v}'_1$ et $\overrightarrow{v}'_2$ des deux corps après choc élastique :
Écrivons les deux lois de conservation en projetant les deux équations obtenues sur l'axe horizontal :

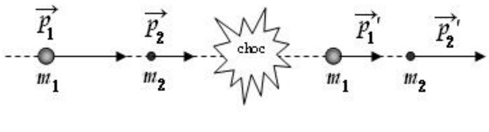


FIGURE 8.3 – Collision directe

— Conservation de la quantité de mouvement :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \tag{8.7}$$

— Conservation de l'énergie cinétique :

$$\boxed{\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_1v_1'^2} \tag{8.8}$$

En en déduit,

$$m_1(v_1' - v_1) = m_2(v_2 - v_2') \tag{8.9}$$
$$m_1(v_1'^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - v_2'^2) \tag{8.10}$$

En utilisant l'identité remarquable : $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$ et en divisant l'équation 8.10 par 8.9 :

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_1' = v_2 + v_2' - v_1}$$

On remplace l'expression de la vitesse v_1' dans l'équation 8.7 on obtient l'expression des vitesses des corps m_1 et m_2 après choc élastique :

$$\boxed{v_1' = \frac{2m_2v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \quad et \quad v_2' = \frac{2m_1v_1 + v_2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}} \tag{8.11}$$

2- Collision d'un projectile sur une cible

Dans ce paragraphe, on traitera le cas où l'un des deux corps est mobile $v_1 \neq 0$ (corps 1) et l'autre immobile $v_1 = 0$ (corps 2). Dans ce cas, les expressions des vitesses retrouvées après choc 8.11 se simplifient :

$$\boxed{v_1' = \frac{v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \quad et \quad v_2' = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2}} \tag{8.12}$$

Que se passe t-il dans des rapports particuliers entre les deux masses des corps m_1 et m_2. On distingue trois cas différents suivant ces deux masses.

♦ **Cas 1 :** $m_1 = m_2$

Il y a transfert de vitesse, c'est le principe du *carreau à la pétanque* ou des oscillations du pendule de *Newton* (pendules simples juxtaposés).

$$\boxed{v_1' = 0 \quad ; \quad v_2' = v_1} \tag{8.13}$$

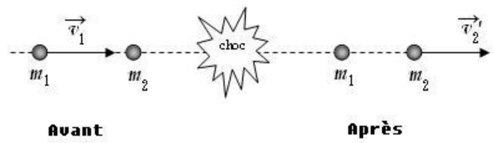


FIGURE 8.4 – Projectile et cible de même masse

♦ **Cas 2 : projectile est beaucoup plus lourd que la cible**

La cible part avec une vitesse double par rapport à celle qu'avait initialement le projectile : c'est le principe du service au tennis.

$$\boxed{v_1' = v_1 \quad ; \quad v_2' = 2v_1} \tag{8.14}$$

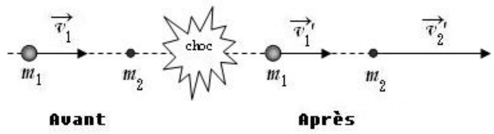


FIGURE 8.5 – Projectile lourd, cible légère

♦ **Cas 3 : projectile est beaucoup plus léger que la cible**

Le projectile revient en arrière avec une vitesse identique à celle qu'il avait initialement. La cible ne bouge pas du fait de son inertie : un exemple serait la balle de tennis de table arrivant sur une boule de pétanque.

$$v'_1 = -v_1 \quad ; \quad v'_2 = 0 \tag{8.15}$$

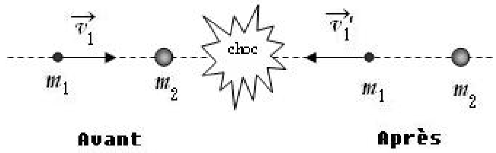


FIGURE 8.6 – Projectile léger, cible lourde

Dans cette configuration, la collision s'effectue dans le plan. Le corps 2 étant immobile l'autre en mouvement. Les équations de conservations sont projetées sur les deux axes du plan.

— **La conservation de la quantité de mouvement :**

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \tag{8.16}$$
$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y} \tag{8.17}$$

— **La conservation de l'énergie cinétique :**

$$m_1(v_{1x}^2+v_{1y}^2)+m_2(v_{2x}^2+v_{2y}^2) = m_1(v'^2_{1x}+v'^2_{1y})+m_2(v'^2_{2x}+v'^2_{2y}) \tag{8.18}$$

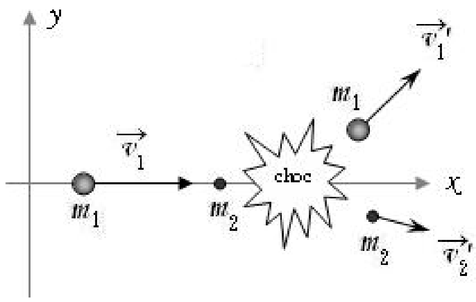


FIGURE 8.7 – Collision à deux dimensions

8.5.2 Collision élastique plan ou bidimensionnel (2D)

1- Collision de deux corps ponctuels

On a au final, 3 équations à 8 inconnues, l'utilisation des conditions initiales peut aboutir à la détermination des 4 vitesses avant le choc. Or, les 4 vitesses après choc restent indéterminées, il faut avoir des conditions supplémentaires pour pouvoir résoudre le problème.

2- Collision de deux objets non ponctuels : Cas des billes de billard

Considérons que les deux billes de billard ont la même masse. La première est animée d'une vitesse $\overrightarrow{v}_1$, la seconde est initialement immobile. On néglige tout effet de frottement entre les surfaces des billes. La force de contact qui s'exerce entre elles est dirigée suivant la droite définie par les deux centres des billes : la bille 2 qui était immobile repart alors dans cette direction comme montré sur la figure.

- **Bille à 90 degrés :**
  D'après la figure 8.8 on remarque qu'après choc les billes repartent à 90 l'une de l'autre. On peut le montrer en écrivant les lois de conservation :
  — **Conservation de la quantité de mouvement :**

$$m\overrightarrow{v}_1 = m\overrightarrow{v}'_1 + m\overrightarrow{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{v}'_1 + \overrightarrow{v}'_2 \tag{8.19}$$

  — **Conservation de l'énergie cinétique :**

$$\frac{1}{2}m\overrightarrow{v}_1^2 = \frac{1}{2}m\overrightarrow{v}'^2_1 + \frac{1}{2}m\overrightarrow{v}'^2_1 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v}_1^2 = \overrightarrow{v}'^2_1 + \overrightarrow{v}'^2_2 \tag{8.20}$$

La comparaison des deux équations 8.19 et 8.20 montre bien que : $\overrightarrow{v}'_1.\overrightarrow{v}'_2 = 0$ ceci implique que $\overrightarrow{v}'_1 \perp \overrightarrow{v}'_2$

- **Relations entre les vitesses après le choc et les angles θ_1, θ_2 :**
  On peut remarquer sur la figure ci-dessus les relations entre les vitesses :

$$v'_1 = v_1 cos\theta_1 \tag{8.21}$$
$$v'_2 = v_1 cos\theta_2 \tag{8.22}$$

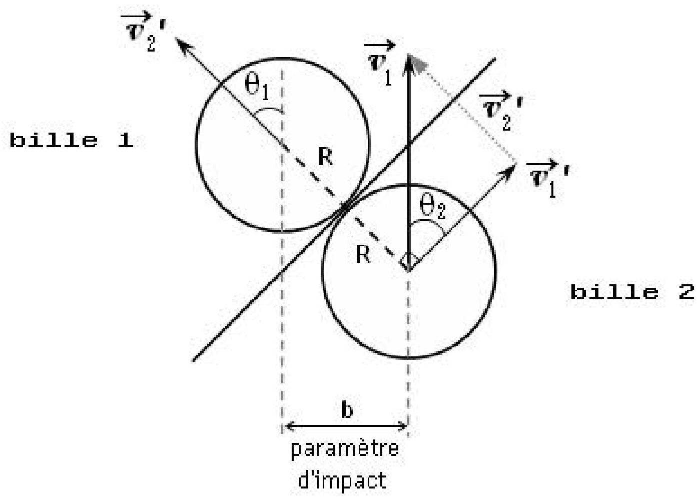


FIGURE 8.8 – Collision entre deux billes de billard

- **Relations entre les angles et le paramètre d'impact $\mathfrak{b}$**
  Sur la figure on peut aussi remarquer que :

$$sin\theta_2 = \frac{\mathfrak{b}}{2R} \tag{8.23}$$

$$sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = cos\theta_1 = \frac{\mathfrak{b}}{2R} \tag{8.24}$$

El Bouhmid le gentleman writed with
El Bouhmid le gentleman
`El Bouhmid le gentleman`
El Bouhmid le gentleman

Appendices

Annexe A

Relations trigonométriques

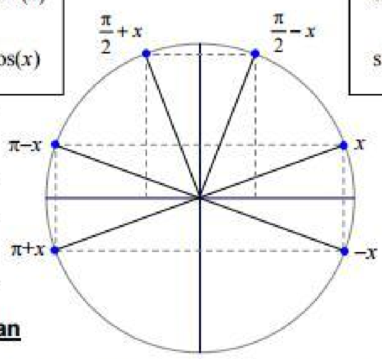
Angles associés

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$



$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$

Relations entre cos, sin et tan

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \qquad 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Formules d'addition

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \qquad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

Formules de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \qquad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \qquad \tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

Extensions : $\cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$ $\quad \sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$ $\quad \tan(3a) = \frac{3\tan(a)-\tan^3(a)}{1-3\tan^2(a)}$

Au delà, utiliser la formule de Moivre.

Formules de linéarisation

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2} \qquad \tan^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)}$$

Extensions : $\cos^3(a) = \frac{\cos(3a)+3\cos(a)}{4}$ $\quad \sin^3(a) = \frac{-\sin(3a)+3\sin(a)}{4}$ $\quad \tan^3(a) = \frac{-\sin(3a)+3\sin(a)}{\cos(3a)+3\cos(a)}$

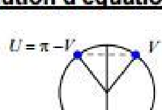
Au delà, utiliser les formules d'Euler. Les formules d'Euler permettent également de montrer que :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)] \qquad \cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)] \qquad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$

$$\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Résolution d'équations trigonométriques



$$\cos(U) = \cos(V) \iff (U = V\ [2\pi] \text{ ou } U = -V\ [2\pi])$$

$$\sin(U) = \sin(V) \iff (U = V\ [2\pi] \text{ ou } U = \pi - V\ [2\pi])$$